Presentació

Els cangurs han anat prenent embranzida. El que va començar com una experiència a Austràlia als mig vuitantes va ser heretat per França i uns quants països més al 1991 sota el nom de *Kangourou sans Frontières*, i s'hi han anat afegint països fins arribar a ser-ne 41 enguany. Els països catalans s'hi van afegir el 1996 i ara hi tenen representació nacional pròpia sota l'aixopluc de la Societat Catalana de Matemàtiques.

L'èxit de l'empresa ha sobrepassat totes les expectatives. Enguany, a les proves, que aquí, en confiança, anomenem **el Cangur**, hi han participat 22.000 estudiants i 600 centres d'ensenyament. Ja comença a ser difícil enllestir tota aquesta organització sense disfuncions, i només gràcies a l'interès i dedicació dels que ho porten es completen les etapes anuals: proposta de problemes a l'organització plurinacional, traducció a la nostra llengua de la proposta acordada en la reunió internacional, preparació del material, organització dels centres on es faran les proves, preparació de diplomes i premis, etc.

I l'empresa ha tingut èxit, i no només al països Catalans, perquè les proves, amb els seus tipus de problemes, que demanen enginy a més de coneixement, han enganxat. Han enganxat l'interès de professors i alumnes, i també dels que els proposen i els preparen. De fet jo diria que els problemes que es proposen han anat adquirint una certa personalitat: la personalitat de problemes del Cangur. I és una personalitat simpàtica. Demana més de l'idea feliç que no pas d'un treball pesat. Les proves Cangur han enganxat i, sense cap dubte, poden ajudar el nostre jovent a interessar-se per la matemàtica i els seus companys de viatge: la ciència i la tecnologia.

En aquesta publicació volem donar a conèixer els problemes que s'han proposat enguany per tal que siguin una font d'entreteniment i de repte a l'esperit. I també afiançadors dels coneixements matemàtics. Direm també quin és el país que ha proposat cada problema: és una mostra de la universalitat de l'esforç sense fronteres i de la col·laboració amb la millor de les disposicions; un exemple no massa abundant en els nostres temps, però sí habitual en l'entorn del Cangur. Fa uns anys la SCM va demanar la participació del professorat per a l'edició dels enunciats i les solucions de totes les edicions del Cangur. El material que vam rebre és excel·lent però diverses raons han fet que encara no hagi cristal·litzat aquella proposta. Ara bé, enguany sí que ens hem decidit i esperem que aquest llibre que teniu a les mans tingui ben aviat continuïtat editorial.

També aprofitem la publicació per a donar a conèixer altres activitats d'estímul del interès i del coneixement de les matemàtiques que organitza la nostra societat, l'**Olimpíada** i els **Problemes a l'esprint**. La Societat Catalana de Matemàtiques agraeix, amb molt entusiasme, l'esforç i la dedicació dels que fan i han fet possible l'èxit d'aquestes activitats.

Carles Perelló Valls
President de la SCM

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase prèvia a Catalunya. Novembre 2008

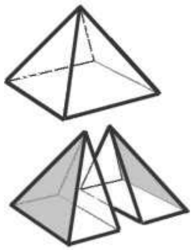
Problemes de 3 punts

1. Ara, a l'any 2008, tinc una edat de m anys. Suposant que fos immortal, quin any hauria multiplicat per k la meva edat?

A) $2008 \cdot k$
B) $k \cdot m \cdot 2008$
C) $2008 + k \cdot m$
D) $2008 + (k-1) \cdot m$
E) $(2008 - m) \cdot k$

2. En un test es plantegen n qüestions. La puntuació de cada pregunta és de p punts (si és correcta), 0 punts (en blanc) o bé -1 punt (errònia). Quin és el mínim nombre de participants que permetrà assegurar a priori que, si més no, dos participants quedaran empatats amb la mateixa puntuació?

3. Una piràmide quadrangular regular es talla en dues peces iguals per un pla perpendicular a dos dels costats de la base en el seu punt mitjà. Aquestes dues peces s'enganxen tot fent coincidir els triangles que s'han acolorit en la figura. Quantes cares i quantes arestes té el cos que s'obté d'aquesta manera?



A) 6 cares, 9 arestes
B) 6 cares, 11 arestes
C) 7 cares, 13 arestes
D) 8 cares, 11 arestes
E) 8 cares, 13 arestes

Problemes de 4 punts

4. L'equació $(((x-a)^2-M)^2-2008)^2=0$ té exactament tres solucions reals diferents per a un cert valor de M. Quant val, en aquest cas, la suma d'aquestes tres solucions?

5. L'àrea del cercle inscrit a un hexàgon regular és $\sqrt{3}\cdot\pi\cdot N^2$ cm ^{2}. Quants cm ^{2} fa l'àrea de l'hexàgon?

6. Hem agafat quatre nombres naturals diferents i els hem sumat per parelles. Les sumes obtingudes són 78, 80, 83, 84, 87, 89. Quin és el nombre més petit dels quatre?

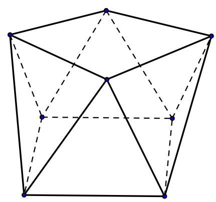
Problemes de 5 punts

7. Si tirem una moneda enlaire q vegades successivament, quina és la probabilitat de treure com a mínim c cares seguides on $c \geq \frac{q}{2}$?

8. El polinomi Ax^3+Bx^2+Cx+D té tres arrels reals a, b, c. Quin és el valor exacte de $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$?

9. Les fraccions següents $\frac{1}{1844}, \frac{2}{1843}, \frac{3}{1842}, ..., \frac{1843}{2}, \frac{1844}{1}$ tenen la propietat que són totes les que es poden escriure amb el numerador i el denominador positius i que sumen 1845. Quantes d'aquestes fraccions són fraccions pròpies i irreductibles?

10. La imatge mostra un políedre que té dues bases que són quadrats iguals i cada vèrtex d'una base s'uneix a dos vèrtexs de l'altra i d'aquesta manera es formen cares laterals que són triangles isòsceles. Si la longitud dels costats dels quadrats de les bases és b i la distància en perpendicular entre les bases és h, determineu el volum del políedre.



XLV Olimpíada Matemàtica

Fase prèvia a Catalunya. Els resultats

Per impulsar la participació en l'Olimpíada catalana, els dies 14 i 15 de novembre de 2008 es van proposar per via telemàtica, els 10 problemes anteriors.

Hi va haver més de 100 participants i, després d'analitzar les respostes rebudes, que atorgaven un màxim de 41 punts, i les explicacions detallades dels problemes 6 i 10, que podien atorgar un màxim de 9 punts, el tribunal qualificador va acordar declarar ex aequo amb 50 punts les 6 persones que s'indiquen seguidament (seguint l'ordre alfabètic dels primers cognoms):

- Guillem Alsina Oriol (1r BTX, IES Jaume Callís, Vic)
- Xavier Fernández-Real Girona (1r BTX, IES Jaume Vicens Vives, Girona)
- Arthur François (2n BTX, Lycée Français, Barcelona)
- Ivan Geffner Fuenmayor (2n BTX, IES Maragall, Barcelona)
- Bru Martinell Chicano (1r BTX, IES Jaume Vicens Vives, Girona)
- Gerard Neras Lozano (1r BTX, IES Jaume Vicens Vives, Girona)

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase prèvia a Catalunya. Solucions

Els problemes es van plantejar amb valors numèrics aleatoris. En aquesta publicació se'n presenta, quan és possible, una versió general.

Problemes de 3 punts

1. $2008 + (k-1)\cdot m$.

Hauré multiplicat per k la meva edat quan tingui $k \cdot m$ anys. Han de passar des d'ara $k\cdot m - m = k\cdot(m-1)$ anys i, per tant, serà l'any $2008 + k\cdot(m-1)$.

2. $\dfrac{2pn + 2n - p^2 + p + 4}{2}$.

La màxima puntuació és $n\cdot p$ punts i la mínima $-n$ punts, cosa que dóna un interval de $(p+1)\cdot n + 1$ puntuacions. És clar que el 0 i totes les puntuacions negatives poden ser observades, però no totes les puntuacions positives són factibles. Veurem quines són les que no es poden aconseguir.

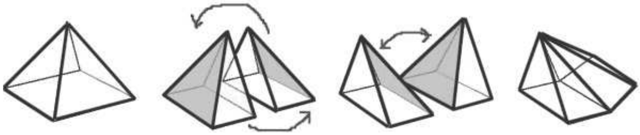
Si es falla o es deixa en blanc una pregunta s'obtenen $(n-1)\cdot p$ o $(n-1)\cdot p - 1$ punts (*). Veiem que entre la màxima puntuació $n \cdot p$ i aquestes hi ha $p-1$ puntuacions que no es poden assolir. Si mirem les puntuacions quan s'encerten totes les preguntes excepte dues són segons els casos $(n-2)\cdot p$, $(n-2)\cdot p - 1$ i $(n-2)\cdot p - 2$ (**) i podem veure que entre les puntuacions (*) i les (**) hi ha $p-2$ puntuacions no assolibles.

Després de les (**) fins a arribar a les que corresponen a 3 preguntes fallades (si p és prou gran) hi ha $p-3$ puntuacions no factibles.

I així successivament veiem que el nombre de puntuacions diferents que no es poden assolir és $(p-1)+(p-2)+(p-3)+\ldots+2+1 = \dfrac{p\cdot(p-1)}{2}$. Així podem saber el nombre de puntuacions diferents que es poden aconseguir i caldrà sumar-li 1 per tenir el nombre mínim de participants que permet assegurar que com a mínim dos empaten.

3. 8 cares, 13 arestes.

La figura visualitza l'enunciat.



Cada part de les dues en què es divideix la piràmide té 5 cares i 8 arestes. Quan es juxtaposen dues cares, una de cada part, aquestes dues cares "desapareixen" i per tant queden $5 + 5 - 2 = 8$ cares; alhora es superposen tres arestes d'una part amb tres arestes de l'altra que esdevindran tres arestes de la nova figura que, doncs, tindrà $8 + 8 - 3 = 13$ arestes.
Com que l'angle que formen les dues cares rectangulars amb les cares que s'enganxen no és un angle recte, es dedueix que les dues cares rectangulars no quedaran en el mateix pla en la figura que s'estudia. Semblantment es raona amb les cares laterals i amb el fet que cap parella d'arestes no queden alineades.

Problemes de 4 punts

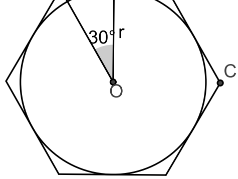
4. $3a$.

$(((x-a)^2 - M)^2 - 2008)^2 = 0$ equival a $((x-a)^2 - M)^2 - 2008 = 0$.
Ha de ser, doncs, $((x-a)^2 - M)^2 = 2008$ cosa que ens porta a $(x-a)^2 - M = \pm\sqrt{2008}$ i d'aquí a $(x-a)^2 = M \pm \sqrt{2008}$ i, finalment, $x = a \pm \sqrt{M \pm \sqrt{2008}}$. Només podrem trobar exactament tres solucions si $M - \sqrt{2008} = 0$ i aleshores les tres solucions són: $x_1 = a + \sqrt{M + \sqrt{2008}}$, $x_2 = a - \sqrt{M + \sqrt{2008}}$ i $x_3 = a$ i la suma demanada és $3a$.

En alguns models l'equació proposada era $(((x-a)^2 - 2008)^2 - M)^2 = 0$. La solució també és $3a$.

5. $6N^2$.

Si indiquem com r el radi del cercle, de l'enunciat deduïm que $r^2 = \sqrt{3} \cdot N^2$. L'hexàgon es pot descompondre en 12 triangles rectangles com el que s'ha dibuixat del qual podem calcular l'altre catet mitjançant la tan $30°$. Les àrees d'aquests triangles sumen $2 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2$ i així arribem de seguida a la solució.



6. 37.

Si indiquem $a < b < c < d$ els quatre nombres podem deduir que $a+b < a+c$ són les dues sumes més petites. Semblantment $b+d < c+d$ són les dues sumes més grans. Entre $a+c$ i $b+d$ hi ha les dues altres sumes $a+d$ i $b+c$ però *a priori* no en sabem l'ordre. En l'exemple proposat serà $a+b = 78$, $a+c = 80$, $,b+d = 87$, $c+d = 89$ i $\{a+d,\ b+c\} = \{83,\ 84\}$. Posem $S = a+b+c+d$. Tenim que la suma dels 6 nombres donats a l'enunciat és $78+80+83+84+87+89 = 501 = 3S$. Aleshores podem provar si $a+d = 84$; seria $a+b+a+c+a+d = 78+80+84 = 2a+S$, cosa que ens porta a un valor fraccionari per a a, que ha de ser un nombre enter. En canvi si fem el mateix amb la hipòtesi $a+d = 83$ arribem a $a = 37$.

Aquest problema no quedaria sempre unívocament determinat en general, amb sumes $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Problemes de 5 punts

7. $(2+q-c) \cdot (\frac{1}{2})^{c+1}$.

Si **C** representa treure una successió de c cares seguides, **+** treure una creu i • treure indistintament cara o creu, els resultats que ens interessen són els que segueixen els esquemes **C•••...•**, **+C••...•**, **•+C•...•**, ..., **••...•+C**. La condició $c \geq \dfrac{q}{2}$ permet assegurar que no hi ha cap possible resultat repetit en un esquema o un altre. Les probabilitats respectives són $(\frac{1}{2})^c$ per al primer esquema i $(\frac{1}{2})^{c+1}$ per als altres $q-c$ esquemes. La probabilitat total serà $(\frac{1}{2})^c + (q-c) \cdot (\frac{1}{2})^{c+1}$ que ens dóna el resultat enunciat.

8. $\dfrac{A-B+C-D}{A}$.

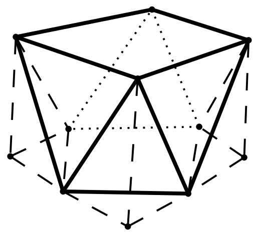
Podem veure que $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$. Si apliquem les fórmules de Cardano relatives a les arrels a, b, c del polinomi $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ tenim que $abc = -\dfrac{D}{A}$, $ab+bc+ca = \dfrac{C}{A}$ i $a+b+c = -\dfrac{B}{A}$, d'on resulta que $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = \dfrac{(A-B+C-D)}{A}$.

9. 480.

Tenim $1845 = 3^2 \cdot 5 \cdot 41$. Com que la fracció $\dfrac{n}{1845 - n}$ ha de ser pròpia només cal que estudiem $n < 922$. Per altra banda si n i $1845 - n$ tenen un factor comú, aquest factor comú ha de ser un divisor de 1845. Hem de comptar, doncs, quants nombres enters positius més petits que 922 són múltiples de 3, de 5 o de 41 (o no exclusiva). Els múltiples de 3 (que ja inclouen els de 3^2) són 307 (la part entera de $\frac{922}{3}$); els de 5, 184; els de 41, 22. Com que els hem comptat dues vegades, hem de descomptar els múltiples de $3 \cdot 5$, que són 61, els de $3 \cdot 41$, que són 7, i els de $5 \cdot 41$, que són 4. I, finalment, tornar a comptar el nombre $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$. La resposta és, doncs $992 - (307 + 184 + 22 - 61 - 7 - 4 + 1) = 480$.

10. $V = \dfrac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \cdot (2 + \sqrt{2})$.

Si pels vèrtexs de la cara inferior tracem paral·leles als costats de la cara superior, que formen angles de 45° amb els costats de la cara inferior, queda definit un quadrat de costat $b \cdot \sqrt{2}$. Si ara unim els vèrtexs d'aquest nou quadrat als vèrtexs de la cara superior es determinen quatre piràmides que tenen per base un triangle rectangle isòsceles. Aquestes quatre piràmides juntament amb la figura donada componen un tronc de piràmide quadrangular regular.



Com que es tracta d'una activitat telemàtica podem suposar que és coneguda la fórmula del volum d'un tronc de piràmide. En el nostre cas, en què els costats de les bases són $B = b \cdot \sqrt{2}$ i b i l'altura h el volum és

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (B^2 + B \cdot b + b^2)\frac{1}{3} \cdot h \cdot b^2 \cdot (3 + \sqrt{2})$$

Per calcular el volum demanat cal restar d'aquest la suma dels volums de les quatre piràmides triangulars que havíem afegit, cada una de les quals té volum $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{b^2}{4} \cdot h$, i així obtenim el resultat.

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Desembre 2008

Primera sessió

11. Dues circumferències són tangents interiorment en T. Sigui AB una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior en el punt P. Demostreu que $\overline{TP}$ biseca $\widehat{ATB}$.

12. Caracteritzeu tots els nombres enters positius N que **no** es poden escriure de cap de les dues maneres següents:

$$ab + a + b, \qquad cd + c - d,$$

amb a, b, c, d enters positius tals que $c \geq d$.

13. Sigui $\{a_n\}$ la successió en la qual a_n es defineix com el nombre natural més proper a $\sqrt{n}$. Quin és el valor de

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}}?$$

Segona sessió

14. Donat un triangle ABC, siguin m_a, m_b, m_c les seves mitjanes i sigui R el radi de la circumferència circumscrita. Demostreu que

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

és un nombre enter positiu i determineu el seu valor.

15. És possible construir un políedre amb totes les cares formades per polígons de diferent nombre de costats?

16. En el conjunt $\{2, 2^2, \ldots, 2^n\}$ (n enter positiu), quina és la probabilitat que, en agafar un nombre a l'atzar del conjunt, la seva expressió decimal comenci amb un 1? Per a un valor gran de n, pots predir el comportament d'aquesta probabilitat?

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Els resultats

La fase catalana de la XLV Olimpíada Matemàtica, amb l'organització de la Societat Catalana de Matemàtiques es va celebrar simultàniament a Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona els dies 12 i 13 de desembre de 2008.

El tribunal que va valorar els treballs dels nois i les noies que es van presentar, que estava presidit pel Dr. Pelegrí Viader (Universitat Pompeu Fabra) i en formaven part el Dr. Josep Pla (Universitat de Barcelona) i la professora Ester Silberstein (Aula, Escola Europea, de Barcelona), va prendre l'acord d'atorgar els premis següents:

Primers premis

- Iván Geffner Fuenmayor,
  IES Maragall (Barcelona), 2n de batxillerat
- Guillem Alsina Oriol,
  IES Jaume Callís (Vic), 1r de batxillerat
- Félix Miravé Carreño,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 2n de batxillerat

Segons premis

- Pere Planell Morell,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat
- Jaume Pujantell Traserra,
  IES Pere Fontdevila (Gironella), 2n de batxillerat
- David Lorenzana Martínez,
  Escola Joan Pelegrí (Barcelona), 2n de batxillerat

Tercers premis

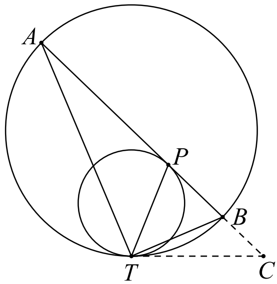
- Guillermo Izquierdo Bouldstridge,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat
- Arthur François,
  Lycée Français (Barcelona), 2n de batxillerat
- Xavier Fernández-Real Girona,
  IES Jaume Vicens Vives (Girona), 1r de batxillerat

XLV Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Solucions

1. Primera solució.

Si dibuixem la tangent comuna a les dues circumferències en el punt T i anomenem C el punt d'intersecció amb la recta AB, tenim que el triangle PTC és isòsceles atès que $\overline{CP} = \overline{CT}$ per ser tangents a la mateixa circumferència. Així, $\widehat{TPC} = \widehat{CTP} = \widehat{CTB} + \widehat{BTP}$.
Els angles $\widehat{CTB}$ i $\widehat{TAB}$ són iguals perquè comprenen el mateix arc a la circumferència exterior (el primer és semiinscrit i el segon inscrit).
Ara, $\widehat{TPA}$ és suplementari de $\widehat{TPC}$ o sigui que, considerant el triangle ATP, tenim $\widehat{TPC} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}$. Hem obtingut, doncs, $\widehat{TPC}$ expressat de dues maneres:

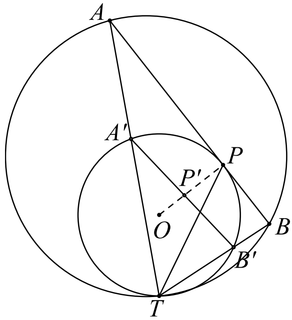


$$\widehat{CTB} + \widehat{BTP} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}$$

o sigui que $\widehat{BTP} = \widehat{ATP}$ com s'havia de demostrar.

1. Segona solució.

L'homotècia de centre T que transforma la circumferència gran en la petita, transforma A en A' i B en B'. Les rectes AB i $A'B'$ són, per tant, paral·leles. Com que el radi OP és perpendicular a la tangent AB, també és perpendicular a $A'B'$. El punt P' ha de ser el punt mitjà de $A'B'$ i la recta OP' és la mediatriu del triangle $TA'B'$ corresponent al costat $A'B'$. Els arcs $A'P$ i PB' són iguals i per tant TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{A'TB'}$, com calia demostrar.



2. Considerem un nombre enter positiu qualsevol, N. Si es pot posar $N = ab + a + b$ serà $N = a(b+1) + b = (a+1)(b+1) - 1$. En conseqüència, $N+1 = (a+1)\cdot(b+1)$ és un nombre compost. Si fos $N = cd + c - d$ tindríem $N = c(d+1) - d = (c-1)(d+1) + 1$. En conseqüència, $N - 1 = (c-1)\cdot(d+1)$ és un nombre compost, llevat dels casos $c = 2, d = 1$ i $c = 2, d = 2$. El cas $c = 2, d = 1$ correspondria a $N = 3$ pel qual $N + 1 = 4$ és compost i els cas $c = 2, d = 2$ correspondria a $N = 4$ que és la única excepció.

En conseqüència, els enters positius N que no són ni d'una manera ni de l'altra són aquells que compleixen que $N + 1$ i $N - 1$ són primers amb l'excepció del 4. Això caracteritza els nombres que ens demanen: són els que estan situats entre dos primers bessons a excepció del 4. És a dir: 6, 12, 18, 30, 42, 60, etc.

3. Si fem una mica d'observació, tindrem:

$$\begin{array}{l} n: 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16, 17, 18, 19, 20, 21, ... \\ a_n: 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4, 4, 4, 4, 4, 5, ... \end{array}$$

Ens adonem que a la segona fila, l'1 es repeteix dues vegades, el 2 es repeteix 4 vegades, el 3 es repeteix 6 vegades, el 4 es repeteix 8 vegades. A més, si ens fixem en els quadrats perfectes de la primera fila, veiem que on tenim k^2, el corresponent a_k és, òbviament, k i aquest valor es manté entre els valors $k^2 - (k-1)$ i $k^2 + k$. Per tant, podem conjecturar que $a_n = k$ si, i només si, $n = k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \ldots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. En total, $a_n = k$ per $2k$ valors de n. Demostrem aquesta conjectura.

Si $a_n = k$, això equival a que $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$. Les desigualtats són estrictes perquè $\sqrt{n}$ no pot prendre mai el valor $k + 1/2$ amb k enter. Tenim, doncs, elevant al quadrat, que $k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}$. Aquestes desigualtats, òbviament porten a que $n = k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \ldots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. En conseqüència, un valor k s'aconsegueix $2k$ vegades exactament pels valors de n compresos entre $k^2 - k + 1$ i $k^2 + k$. Això significa que la fracció $1/k$ apareix $2k$ vegades. Mirem ara com queda 2008 en relació a la seva posició en una llista $k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \ldots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. Concretament, com que $\sqrt{2008} = 44.8\ldots$, el valor de a_{2008} serà 45 i serà dins de la llista $45^2 - 45 + 1 = 1981, \ldots, 45^2 + 45 = 2070$. Aquest valor s'haurà assolit exactament per $a_{1981}, a_{1982}, \ldots, a_{2008}$. Exactament 28 vegades.

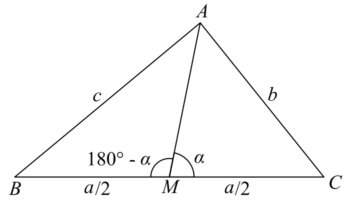
Estem en condicions de fer la suma total:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 88 \cdot \frac{1}{44} + 38 \cdot \frac{1}{45} = 44 \cdot 2 + \frac{28}{45} = \frac{3988}{45}.$$

4. El teorema del sinus aplicat al triangle ABC ens dóna

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

i d'aquí surt que el denominador de l'expressió de l'enunciat és $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Calculem ara les mitjanes.



Considerem la mitjana m_a que uneix el vèrtex A amb el punt M mitjà del segment BC. El teorema del cosinus aplicat al triangle AMB ens dóna $c^2 = m_a^2 + a^2/4 - a\, m_a \cos(180° - \alpha) = m_a^2 + a^2/4 + a\, m_a \cos\alpha$ i semblantment en el triangle AMC tenim $b^2 = m_a^2 + a^2/4 - a\, m_a \cos\alpha$. Sumant les dues expressions queda $b^2 + c^2 = a^2/2 + 2m_a^2$.

Fàcilment obtenim $m_a^2 = (2c^2 + 2b^2 - a^2)/4$ i per tant

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

El nombre que ens demanen és 3.

5. Primera solució.

Suposem que la cara amb el nombre més gran de costats en té n. Les cares poden ser de 3, 4, 5, ..., $n-1$, n costats. Com a màxim hi ha $n-2$ cares. En cada una de les n arestes de la cara que en té més hi hem de poder adossar una cara, però no tenim prou cares ja que , com a màxim, ens en queden $n-3$.

Per tant és impossible construir un políedre amb totes les cares formades per polígons de diferent nombre de costats.

5. Segona solució.

Designem per c, v i a el nombre de cares, vèrtexs i arestes del políedre. Per la fórmula d'Euler sabem que $c + v = a + 2$, i com que a cada vèrtex hi concorren, com a mínim, tres arestes, tenim també $3v \le 2a$. D'aquestes dues relacions surt fàcilment $6 \le 3c - a$ o bé $12 \le 6c - 2a$.

Designem per c_i el nombre de cares que tenen i costats. Aleshores es compleix $c = c_3 + c_4 + \cdots + c_n$ i $2a = 3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n$.

Si substituïm a la fórmula $12 \le 6c - 2a$ els valors de c i $2a$ obtenim

$$\begin{aligned}12 &\le 6\big(c_3 + c_4 + \cdots + c_n\big) - \big(3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n\big) = \\ &= 3c_3 + 2c_4 + c_5 - \big(c_7 + 2c_8 + \cdots + (n-6)c_n\big) \\ &\le 3c_3 + 2c_4 + c_5.\end{aligned}$$

Si fos $c_3 \le 1$, $c_4 \le 1$ i $c_5 \le 1$ ens quedaria $12 \le 6$, absurd. En conseqüència, entre les cares d'un políedre cal que es repeteixin efectivament, o bé triangles, o bé quadrilàters, o bé pentàgons.

6. Primera solució.

Demostrarem per inducció que a cada ordre decimal hi ha almenys una potència de 2 (entenem per ordre decimal cada interval entre dues potències de 10 consecutives).

En efecte, a l'ordre $[1, 10)$ n'hi ha 3: 2, 4 i 8. Suposem que a l'ordre k, $[10^{k-1}, 10^k)$ hi ha alguna potència de 2. Aleshores, si aquesta potència no arriba a la meitat de l'ordre, la potència següent queda dins del mateix ordre ($499\ldots99 \times 2 = 999\ldots98$). Com que dins d'un ordre decimal no hi pot haver infinites potències de 2, alguna d'elles passarà de la meitat i la potència següent serà de l'ordre següent $k + 1$, $[10^k, 10^{k+1})$.

Aquesta potència de dos que acabem de trobar a la demostració anterior comença amb un 1 ($999\ldots99 \times 2 = 1999\ldots98$). A més és l'única potència de 2 dins de l'ordre decimal que comença amb un 1. En conclusió a cada ordre decimal hi ha una *única* potència de 2 que comença amb un 1. A la successió $\{2, 2^2, \ldots, 2^n\}$ hi ha tantes potències de 2 que comencen amb un 1 com ordres decimals abasti, és a dir, com el nombre de xifres de 2^n que és $\big[\log 2^n\big] + 1 = \big[n \log 2\big] + 1$.

Si tenim present que a l'odre decimal 1 no n'hi ha cap ja que $2^0 = 1$ no és del conjunt, la probabilitat buscada és $p_n = \dfrac{\big[n \log 2\big]}{n}$.

Com que $\big[n \log 2\big] = n \log 2 - \{n \log 2\}$ (on $\{\alpha\}$ indica la *part fraccionària* del nombre real α, $0 < \{\alpha\} < 1$), resulta $p_n = \log 2 - \dfrac{\{n \log 2\}}{n}$ que tendeix a $\log 2$ quan n es fa gran.

6. Segona solució.

Una primera observació que hem de fer és que per cada valor enter positiu de k existeix una única potència de 2 de k xifres que comença per 1. Per $k = 1$ és evident: $2^0 = 1$. Per $k > 1$, tot rau a estudiar la doble desigualtat

$$10^{k-1} < 2^r < 2{\cdot}10^{k-1}$$

i veure que té solució única en r. Traient logaritmes decimals,

$$k - 1 < r{\cdot} \log_{10}(2) < k - 1 + \log_{10}(2).$$

Ara, dividint tot per $\log_{10}(2)$:

$$\frac{k-1}{\log_{10}(2)} < r < \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1.$$

Com que $\log_{10}(2)$ no és un nombre racional, a l'interval

$$\left(\frac{k-1}{\log_{10}(2)}, \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1\right)$$

segur que hi ha un únic nombre enter positiu r.

Vist això, comptem quantes potències de 2 del conjunt $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n\}$ comencen per 1. Amb la observació anterior, deduïm que el nostre recompte coincideix amb el nombre de dígits decimals de 2^n. És a dir, $[n \cdot \log_{10}(2)]$ (la notació $[\cdot]$ denota la part entera d'un nombre real).

La probabilitat demanada és

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n}.$$

Com que podem escriure $[n\cdot\log_{10}(2)] = n\cdot\log_{10}(2) - \alpha$, on $0 < \alpha < 1$, tenim que

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n} = \frac{n \cdot \log_{10}(2) - \alpha}{n} = \log_{10}(2) - \frac{\alpha}{n}.$$

Si n és gran, com que $0 < \alpha < 1$, és clar que la fracció α/n és molt petita. La probabilitat s'acostarà a $\log_{10}(2) = 0.301030\ldots$.