XL OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

12 de desembre de 2003, de 16 a 20h.

1.–Donat un triangle ABC, es busca un punt P, interior al triangle, tal que els seus punts simètrics respecte dels costats del triangle, P_a, P_b i P_c, siguin vèrtexs d'un triangle equilàter.

a) Quines condicions ha de complir el triangle ABC perquè hi hagi solució?

b) Si es compleixen aquestes condicions, com trobariem el punt P?

2.–Resoleu els sistema d'equacions

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\ x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}). \end{aligned}$$

3.–Trobeu el centre i el radi de la circumferència que intercepta sobre cada costat d'un triangle donat segments iguals al radi.

4.–Direm que un nombre natural és *consecutivable* quan es pugui expressar com a suma de nombres naturals consecutius. Així, $9 = 2 + 3 + 4$ és *consecutivable* mentre que 2 i 4 no ho són. Quins són els nombres naturals *consecutivables*?

XL OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 de desembre de 2003, de 9 a 13h.

5.–Amb dos colors, blau i groc, s'han de pintar els pisos d'un gratacel, cada pis d'un color. L'única limitació és que dos pisos consecutius no poden pintar-se de groc. De quantes maneres es pot aconseguir això si el gratacel té 15 pisos? I si en té 2003? (Trobeu una expressió que ens permeti calcular-les d'alguna manera).

6.–Efectueu la divisió entera

$$2003^{2003} \;\underline{\big|\, 2004\quad}$$

7.–Donat un segment AB de longitud 8 m, trobeu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles de base AB, els perímetre dels quals amida 18 m.

8.–Descriviu els políedres convexos de 6 vèrtexs.

XL OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

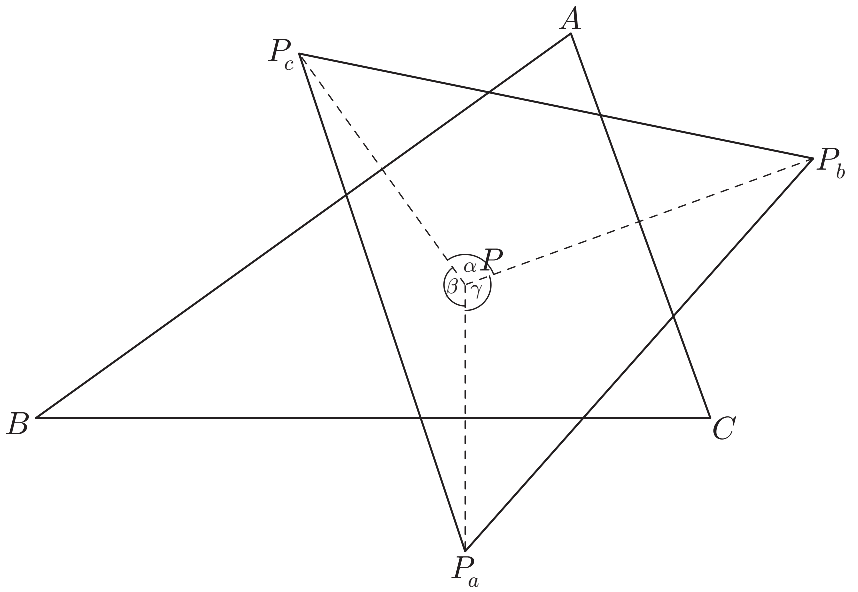
12 i 13 de desembre de 2003.

Solucions:

1.–

a) Suposem el problema resolt. Els punts P_a, P_b, P_c són els simètrics del punt P respecte dels costats del triangle ABC i a la vegada són vèrtexs d'un triangle equilàter. Coneixem els angles formats pels segments traçats des de P als vèrtexs del triangle equilàter

$$\alpha = \widehat{P_b P P_c} = 180^\circ - A, \quad \beta = \widehat{P_c P P_a} = 180^\circ - B, \quad \gamma = \widehat{P_a P P_b} = 180^\circ - C.$$



Com que $\alpha > 60^\circ$, $\beta > 60^\circ$ i $\gamma > 60^\circ$, la condició que ens demanen és que els tres angles del triangle siguin més petits que 120°.

a) Ho fem per semblança. Donat el triangle ABC coneixem els seus angles i per tant els angles α, β i γ. Dibuixem un triangle equilàter qualsevol $P'_a P'_b P'_c$ i els arcs capaços des dels quals es veuen els costats del triangle equilàter dibuixat sota els angles α, β i γ. Sigui P' el punt de tall (només cal dibuixar dos arcs). Les mediatrius dels segments $P'P'_a$, $P'P'_b$ i $P'P'_c$ formen un triangle $A'B'C'$ que té els mateixos angles que ABC. Per tant els dos triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants i la semblança que transforma el segon en el primer, transformarà P' en el punt P buscat.

2.–De les equacions surt

$$\begin{aligned} x_1 &= 2a_1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ x_2 &= 2a_2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= 2a_n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \end{aligned}$$

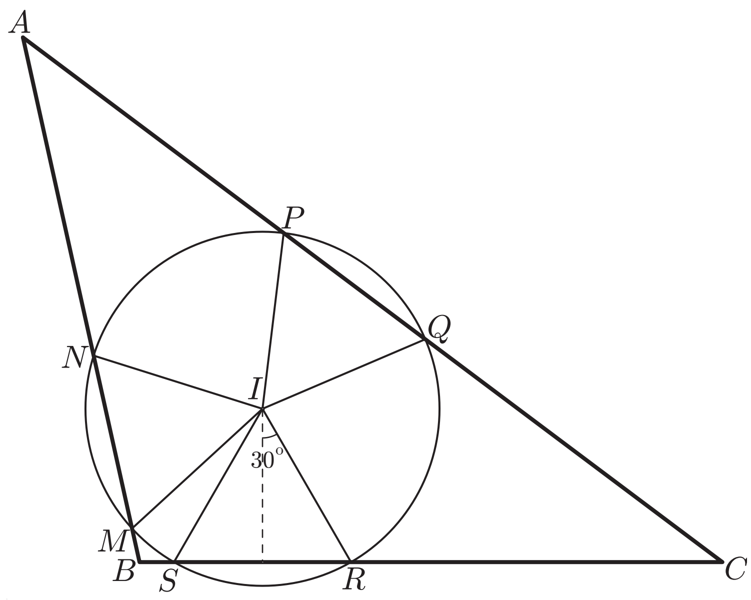
i sumant

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{o bé} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}.$$

Finalment, substituint aquests valors a les equacions inicials queda

$$\begin{aligned} x_1 &= 2a_1 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1} = 2\left(a_1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}\right) \\ x_2 &= 2a_2 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1} = 2\left(a_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= 2a_n - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1} = 2\left(a_n - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}\right). \end{aligned}$$

3.–Suposem el problema resolt i considerem la circumferència solució de centre I i radi r. Els triangles MNI, QIP i RSI són equilàters i iguals. Les altures d'aquests triangles també seran iguals. Per tant el punt I equidista dels tres costats i és l'incentre del triangle. Traçant per I una perpendicular al costat BC i rectes a cada costat que formin amb ella angles de 30° obtindrem els triangles equilàters buscats.



4.–Els nombres que busquem són de la forma

$$N = (m+1) + (m+2) + \cdots + n = \frac{(n+m+1)(n-m)}{2}.$$

amb $0 \leq m \leq n-2$. Ens quedarà $2N = (n+m+1)(n-m)$ que és el producte de dos nombres de diferent paritat. Resulta immediatament que si N és una potència de 2, no és *consecutivable*. Si N no és una potència de 2, cada descomposició $2N = a\,b$ amb $a \not\equiv b \pmod 2$ i $a > b \geq 2$ dóna una descomposició de N en b sumands consecutius.

5.–Escrivim B si un pis es pinta de blau i G si es pinta de groc. Per un gratacel de n pisos, anomenem S_n el nombre total de maneres de pintar-lo amb la limitació de l'enunciat. Per un gratacel de 1 pis clarament tenim $S_1 = 2$: podem pintar-lo B o podem pintar-lo G. Si el gratacel té dos pisos podem pintar-lo BB, GB o BG i $S_2 = 3$. En el cas de tres pisos tenim

$$BBB,\ GBB,\ BGB,\ BBG,\ GBG$$

i queda $S_3 = 5$.

En el cas de 4 pisos tenim

$$BBBB,\ GBBB,\ BGBB,\ BBGB,\ GBGB,\ BBBG,\ GBBG,\ BGBG$$

i queda $S_4 = 8$.

Sembla possible conjecturar que $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. En efecte, així és. El pis n del gratacel es pot pintar de blau, independentment de com estiguin pintats els $n-1$ pisos més baixos. Per tant hi ha S_{n-1} maneres de pintar amb el pis n blau. Ara bé, el pis n només es pot pintar de groc si el pis $n-1$ està pintat de blau, i els $n-2$ més baixos poden estar pintats de qualsevol manera. Per tant hi ha S_{n-2} maneres de pintar el pis

n de groc. En conseqüència ha de ser $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. L'obtenció de S_{15} es pot fer a mà:

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \; \ldots$$

de forma que $S_{15} = 1597$. Per tal de calcular S_{2003} hem d'intentar obtenir una fórmula tancada per a S_n. El mètode general per a obtenir la fórmula tancada de successions recurrents lineals amb coeficients constants, com la d'aquest problema, consisteix a trobar successions linealment independents que compleixin la recurrència i que generin totes les solucions. Per fer això, es busquen les progressions geomètriques que satisfacin la recurrència. En el nostre cas, provem amb $S_n = r^n$, que ens dóna, a partir de la recurrència $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$, l'equació $r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$. Com que $r \neq 0$ ha de ser $r^2 - r - 1 = 0$ i els possibles valors de r són

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

i la solució general és

$$S_n = a\,\alpha^n + b\,\beta^n.$$

Les condicions inicials $S_1 = 2$ i $S_2 = 3$ ens donen els valors de a i de b. La solució de la nostra recurrència és

$$S_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

La successió obtinguda és una successió de Fibonacci amb valors inicials 1 i 2.

6.–Com que $2003 \equiv -1 \pmod{2004}$, serà $2003^{2003} \equiv (-1)^{2003} \equiv -1 \equiv 2003 \pmod{2004}$ i el residu R és 2003. El quocient Q serà

$$Q = \frac{2003^{2003} - 2003}{2004}.$$

Es pot donar una expressió diferent d'aquest quocient.

Solució 1:

Tenim

$$\frac{2003^{2003} - 2003}{2004} = 2003\frac{2003^{2002} - 1}{2003 + 1}$$

i aquesta última fracció es pot escriure

$$\begin{aligned}
\frac{2003^{2002} - 1}{2004} &= 2003^{2001} - 2003^{2000} + 2003^{1999} - \cdots + 2003 - 1 = \\
&= (2003^{2001} - 2003^{2000}) + (2003^{1999} - 2003^{1998}) + \cdots \\
&\quad \cdots + (2003^3 - 2003^2) + (2003 - 1) = \\
&= 2002\,(2003^{2000} + 2003^{1998} + \cdots + 2003 + 1)
\end{aligned}$$

de manera que el quocient és

$$Q = 2003 \cdot 2002\,(2003^{2000} + 2003^{1998} + \cdots + 2003^2 + 1).$$

Solució 2:

Si operem en base 2003 la divisió resulta ser

$$10^{10} \;\begin{array}{|l}11 \\ \hline \end{array}$$

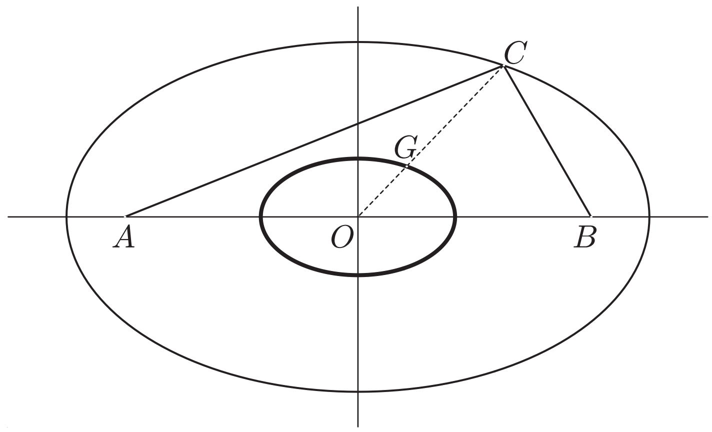
o sigui

$$1\overbrace{0000\ldots000}^{2003} \;\begin{array}{|l}11 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} \overbrace{10000\ldots00}^{1001 \text{ parelles}}0 & \quad 11 \\ \cline{2-2} \;\;100 & \underbrace{\alpha0\alpha0\alpha\ldots\alpha0}_{1001} \\ \quad\;\;100 & \\ \qquad\;\;\ldots & \\ \qquad\;\;100 & \\ \qquad\quad\;\;10 & \end{array}$$

on α és la xifra que correspon a 2002. El quocient és per tant $Q = \alpha 0 \ldots \alpha 0 = \alpha(10\ldots10)$ que en base 10 serà

$$\begin{aligned} Q &= 2002\,(2003^{2001} + 2003^{1999} + \cdots + 2003^1) = \\ &= 2003 \cdot 2002\,(2003^{2000} + 2003^{1998} + \cdots + 2003^2 + 1) \end{aligned}$$

7.–Si C és el vèrtex del triangle ABC, ha de ser $AC + BC = 10$ i el lloc geomètric de C és una el·lipse de focus A i B. Del punt mitjà del segment AB diguem-ne O i del baricentre del triangle ABC diguem-ne G. Com que $OG = \frac{1}{3}OC$, resulta que G està en l'el·lipse homotètica de l'anterior en l'homotècia de centre O i raó $\frac{1}{3}$.



També podem calcular analíticament. Posem els eixos de coordenades als eixos de l'el·lipse. Les coordenades de C són $(\overline{x}, \overline{y})$ i les de G són (x, y). L'homotècia esmentada abans ens diu que $x = \overline{x}/3$, $y = \overline{y}/3$. L'el·lipse lloc geomètric de C té semieix major $a = 5$, distància focal $c = 4$ i semieix menor $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$. L'equació d'aquesta el·lipse serà

$$\frac{\overline{x}^2}{25} + \frac{\overline{y}^2}{9} = 1.$$

Substituint els valors de x, y queda

$$\frac{9x^2}{25} + \frac{9y^2}{9} = \frac{x^2}{\frac{25}{9}} + y^2 = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse de centre O i semieixos $\frac{5}{3}$ i 1.

8.–Si l'hem de menester, podem emprar la fórmula d'Euler $C - A + V = 2$, on C, A, V són el nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs d'un políedre eulerià i en particular convex. Si $V = 6$, ha de ser $A - C = 4$. Com que cada cara té 3 arestes o més, serà $3C \leq 2A$ i per tant $4 = A - C \geq A - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A$, o sigui $A \leq 12$. D'altra banda, a cada vèrtex hi concorren 3 o més arestes i ha de ser $18 = 3V \leq 2A$, d'on resulta $A \geq 9$. El únics valors possibles per a A són 9, 10, 11 i 12, que corresponen, respectivament, als valors de C: 5, 6, 7 i 8. Les cares del políedre no poden tenir més de 5 vèrtexs (en total n'ha ha 6). Sigui p el nombre de cares pentagonals, q el de cares quadrangulars i t el de cares triangulars. Tindrem

$$\begin{aligned} 5p + 4q + 3t &= 2A \\ p + q + t &= C \end{aligned}$$

o bé, tenint present que $2A - 2C = 8$ i restant el doble de la segona equació de la primera

$$\begin{aligned} 3p + 2q + t &= 8 \\ p + q + t &= C \quad \text{amb } 5 \leq p + q + t = C \leq 8 \end{aligned}$$

Si donem a C els possibles valors de 5 a 8 i resolem el sistema tenint present que els valors p, q, i t són enters més grans o iguals que 0, queda la Taula Principal següent

	C	p	q	t	A
Cas 1:	5	1	1	3	9
Cas 2:	5	0	3	2	9
Cas 3:	6	1	0	5	10
Cas 4:	6	0	2	4	10
Cas 5:	7	0	1	6	11
Cas 6:	8	0	0	8	12

Farem servir repetidament el *raonament de connexió* següent: si a un políedre convex li traiem una cara, amb les seves arestes i els seus vèrtexs, la figura que queda (políedre amb una cara "foradada") ha de ser connexa, és a dir, donats dos vèrtexs qualssevol, han de poder unir-se per arestes de la figura.

Les cares no poden tenir més de 5 vèrtexs. Distingirem els casos segons que el políedre tingui alguna cara pentagonal, o dues o mes quadrangulars, o una quadrangular, o bé només cares triangulars

8.1.– Hi ha cares pentagonals.

Si un cara és un pentàgon de cada aresta ha de sortir una altra cara, i com que no queda més que un vèrtex, aquestes cares han de ser triangles amb un vèrtex comú.

El políedre és una piràmide pentagonal (Fig. I).

D'aquí resulta que que el Cas 1 de la Taula Principal no dóna cap solució i que el Cas 3 en dóna una.

8.2.– Cap cara es pentagonal.

8.2.1.– Hi ha dues cares quadrangulars.

Si cap cara és pentagonal i hi ha dues cares quadrangulars, aquestes per força han de tenir una aresta MN en comú, ja que només hi ha 6 vèrtexs. No queden més vèrtexs.

8.2.1.1.– Si hi ha un altre quadrilàter, ha de ser $ABCD$ (Fig. 1), i el políedre és un prisma triangular (Fig. II).

Aquest políedre és l'únic que correspon al Cas 2 de la Taula.

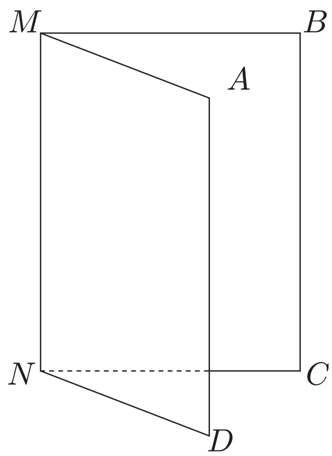


Fig. 1

8.2.1.2.– Si només hi ha dues cares quadrangulars amb una aresta MN en comú, les altres cares han de ser triangles. L'aresta AD (Fig. 1) ha de formar triangle amb B o amb C. Suposem que ho fa amb C. Si ADC és una cara, ABC ha de ser l'altra. Les cares triangulars són ABM, CDN, ACD i ABC (Fig. III).

Aquest políedre és l'únic que correspon al Cas 4 de la Taula.

8.2.2.– Només hi ha una cara quadrangular.

De cada una de les seves arestes ha de sortir-ne una cara triangular. Com que queden 2 vèrtexs i els quatre triangles no poden tenir el mateix vèrtex, podran passar dues coses.

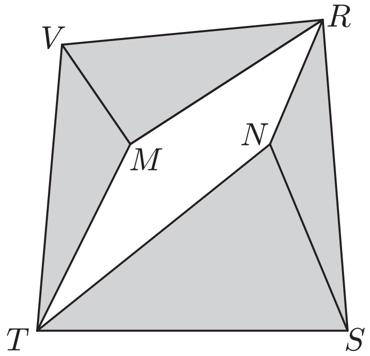


Fig. 2

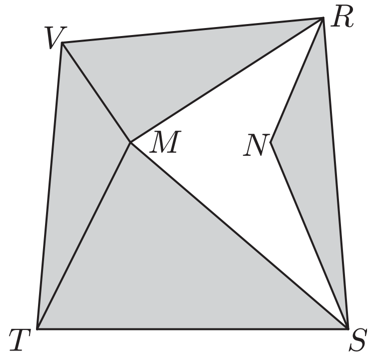


Fig.3

8.2.2.1.– Que dos triangles tinguin un vèrtex comú i els altres dos un altre vèrtex comú (Fig. 2). Les cares del políedre són el quadrilàter del pla del dibuix i els triangles grisos fora del pla del dibuix.

8.2.2.2.– Que tres triangles tinguin un vèrtex comú. (Fig. 3). Les cares del políedre són el quadrilàter del pla del dibuix i els triangles grisos fora del pla del dibuix.

En els dos casos si suprimim la cara quadrangular $TSRV$, l'argument de connexió ens diu que els vèrtexs M i N han d'estar units per una aresta MN.

Els dos políedres es poden interpretar com una piràmide quadrangular on s'ha "estirat" el vèrtex en una aresta, afegint-hi així dues noves cares triangulars. En el primer cas les dues noves cares van cap a costats diferents (Fig. IV) i en el segon les dues noves cares van cap al mateix costat (Fig. V). El segon cas també es pot interpretar com una piràmide quadrangular on s'ha substituït una cara lateral per un tetràedre.

Aquests dos políedres corresponen al Cas 5 de la Taula.

8.2.3.– Totes les cares són triangles.

Sigui ABC una cara. De cada aresta ha de sortir una cara també triangular, que acabarà en un dels tres vèrtexs M, N, i P que ens queden.

Tindrem dos possibles casos representats a les dues Figs. 4 i 5, on la cara ABC és al pla del dibuix i els tres triangles ombrejats són fora del pla del dibuix.

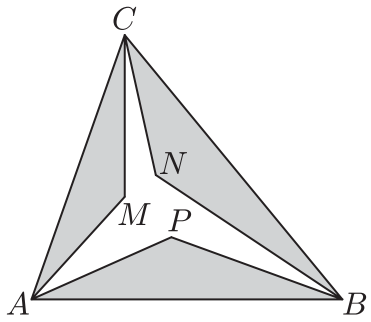


Fig. 4

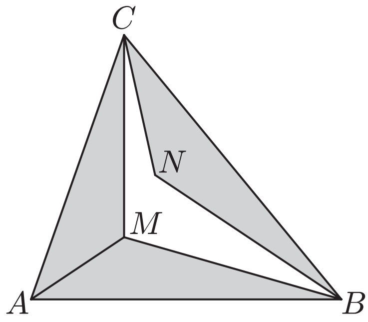


Fig. 5

8.2.3.1.– Els tres triangles que surten dels costats de ABC van a parar cada un a un vèrtex diferent M, N i P. (Fig. 4)

L'argument de connexió ens diu que si suprimim la cara ABC, els vèrtexs que queden M, N i P s'han de poder connectar amb arestes. Això exigeix que al menys n'hi hagi dues, per exemple, les MN i MP. Ens queda la Fig. 5.

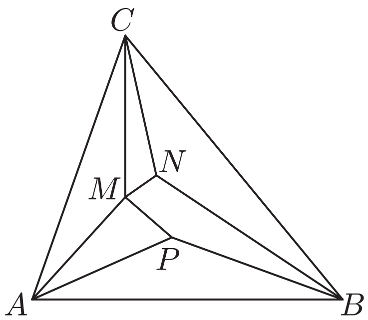


Fig. 6

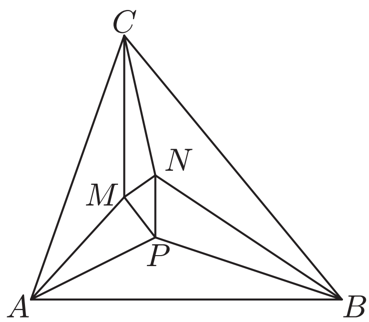


Fig. 7

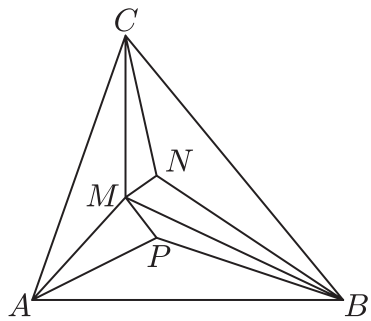


Fig. 8

Per acabar el políedre, podem fer o bé l'aresta PN o bé l'aresta MC.

El primer cas és l'octàedre (Fig. 7) o doble piràmide quadrangular (Fig. VI) i el segon (Fig. 8) s'obté triangulant la base d'una piràmide pentagonal (Fig. VII). Aquest cas també es pot descriure com un tetràedre on s'han substituït dues cares per altres dos tetràedres.

8.2.3.2.– Dels tres triangles que surten dels costats de ABC, dos van a parar a un vèrtex M, i l'altre al vèrtex N.

Queda un altre vèrtex P que ens ha de servir per tancar el "forat" $MBNC$. (Fig. 5)

Des del vèrtex P poden sortir 3 o 4 arestes (no poden ser menys de 3 i si fossin 5 necessàriament 3 d'elles anirien als vèrtexs A,

B i C i de les arestes AB i CA en sortirien tres cares).

Si des de P surten 3 arestes (Fig. 9), no pot ser que dues vagin a B i C ja que l'altra hauria d'anar a un dels dos M o N, i l'altre d'aquests dos quedaria desconnectat. Per tant MN ha de ser aresta i MNB o MNC una cara. Suposem que ho és la primera. Ara des de P hem de tapar el "forat" MNC amb les cares PMN, PNC, PCM.

Si des del vèrtex P surten 4 arestes (Fig. 10), han d'anar a $MNBC$ i el "forat" $MBNC$ s'ha de tancar amb les cares PMB, PBN, PNC, PCM.

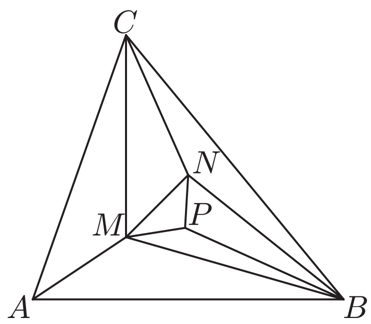


Fig. 9

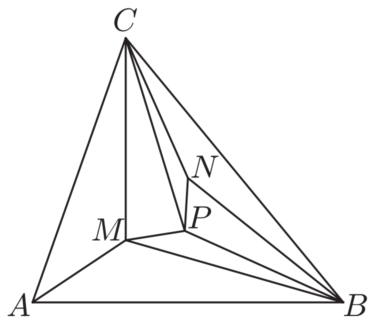


Fig. 10

Aquests dos políedres no són nous, ja que són com el de la Fig. VII, és a dir, una piràmide pentagonal amb la base triangulada o un tetràedre amb dues cares substituïdes per tetràedres, com en el cas 2.3.1.

A les tres figures de sota hi ha el políedre de la Fig. VII amb les lletres corresponents a les Figs. 8, 9 i 10.

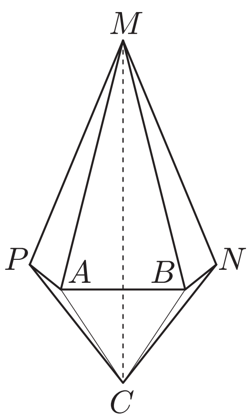


Fig. 9

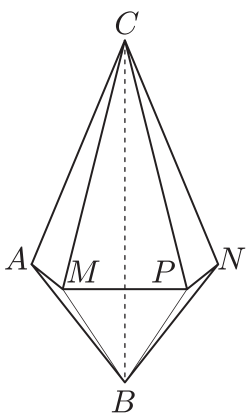


Fig. 10

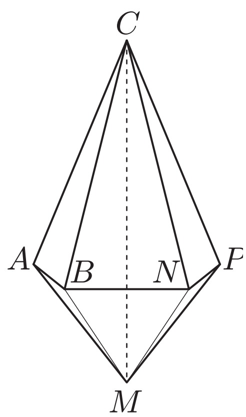


Fig. 11

TAULA RESUM

	C	p	q	t	A	v_3	v_4	v_5	Fig.
Cas 1:	5	1	1	3	9	—	–	—	—
Cas 2:	5	0	3	2	9	6	0	0	II
Cas 3:	6	1	0	5	10	5	0	1	I
Cas 4:	6	0	2	4	10	4	2	0	III
Cas 5:	7	0	1	6	11	2	4	0	IV
						4	2	0	V
Cas 6:	8	0	0	8	12	0	6	0	VI
						2	2	2	VII

C: nombre total de cares

p: nombre de cares pentagonals

q: nombre de cares quadrangulars

t: nombre de cares triangulars

A: nombre d'arestes

v_3: nombre de vèrtexs de grau 3 (amb tres arestes concurrents)

v_4: nombre de vèrtexs de grau 4 (amb quatre arestes concurrents)

v_5: nombre de vèrtexs de grau 5 (amb cinc arestes concurrents)

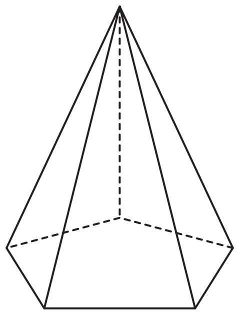


Fig. I

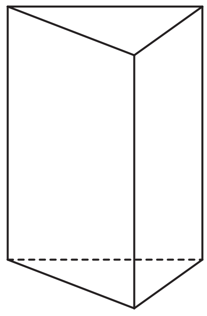


Fig. II

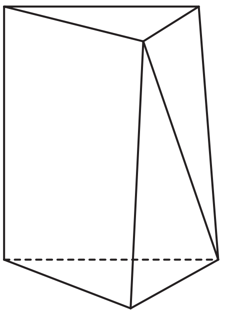


Fig. III

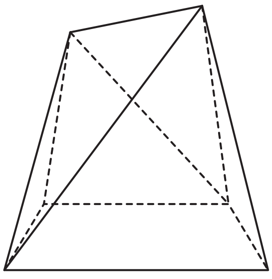


Fig. IV

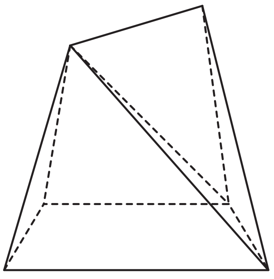


Fig. V

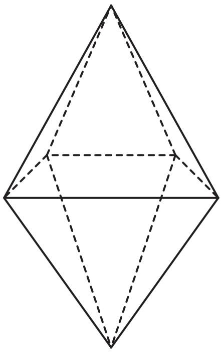


Fig. VI

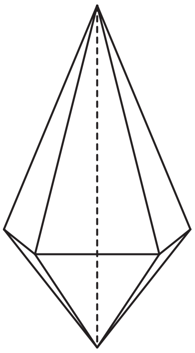


Fig. VII