ÍNDEX

Presentació i agraïments

Aquest llibre arriba a una nova edició en un format totalment nou, inaugurant una col·lecció de publicacions electròniques de la Societat Catalana de Matemàtiques.
S'han corregit, fins allà on s'ha pogut, els errors detectats en edicions anteriors.

Els capítols són propietat dels corresponents autors i tots ells n'han fet una gratuïta cessió d'ús a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Les sessions de preparació per a l'Olimpíada matemàtica compten amb la participació d'alguns autors i d'altres professors a Barcelona, Bellaterra, Girona, La Garriga, Lleida, Manresa, Tarragona i Vilanova i la Geltrú.

En nom de la SCM vull deixar constància pública de l'agraïment de la Societat, al qual hi afegeixo el meu propi, envers els autors i totes les persones i institucions que fan possibles aquest llibre i les sessions. Hi afegeixo la gratitud envers el professor i company José L. Ruiz, que ens ha fet llum en l'intrincat laberint del TeX i la seva tipografia.

Josep Grané

Geometria clàssica

Sebastià Xambó i Descamps

Aquest capítol conté un promptuari de conceptes bàsics de geometria elemental (seccions 1 i 2) i una col·lecció de problemes (secció 3). També conté una mostra de solucions, que presentem en dues modalitats: d'una manera convencional a la secció 5 i amb forma de diàleg a la secció 4. La raó d'incloure aquesta modalitat està en el fet que ens permet introduir, d'una manera directa i breu, qüestions relatives a la resolució de problemes que poden ser útils a alguns lectors.

Al lector més interessat en la resolució de problemes de geometria clàssica, li hem de recomanar que comenci a treballar directament la llista de problemes, i que retorni a la matèria del capítol (o a algun dels textos indicats a les referències) només quan ho consideri necessari.

En canvi, al lector més motivat per completar els seus coneixements geomètrics bàsics (una necessitat que, per altra banda, pot ser més general del que el nivell de la nostra exposició podria fer pensar, sobretot atenent al tractament de la geometria que es dóna a primària i secundària), li hem de recomanar que estudiï primer les seccions 1 i 2, fins al punt d'omplir tots els detalls de les demostracions que s'ometen, o de les demostracions de les quals només es donen les pinzellades principals, i de resoldre satisfactòriament els exercicis intercalats.

Per contrast amb un estudi sistemàtic de la geometria, en el qual els sistemes geomètrics més importants s'erigeixen sistemàticament a partir d'axiomes convenients, en aquesta exposició pressuposem un coneixement intuïtiu de les nocions i els enunciats més primitus de la geometria euclidiana plana, com ara els relatius a punts, rectes, angles i circumferències. Evitem així prolixes disquisicions, relatives a la construcció i anàlisi metòdica d'aquests conceptes i enunciats, que no aportarien gaire res als propòsits del capítol i que, en tot cas, s'estudien en cursos específics de geometria.

El signe [$\diamond$] al final d'una afirmació significa que es considera que la prova d'aquesta és fàcil o rutinària, però potser no totalment immediata, i per tant es recomana que el lector la comprovi efectivament abans de prosseguir la lectura.

1 Triangles i circumferències

El fet que moltes figures es puguin estudiar relacionant-les amb triangles, com ara quan admeten una triangulació, fa que el triangle s'hagi de considerar com una figura fonamental, i és per aquesta raó que se li dedica un espai considerable en els textos de geometria clàssica. Per altra banda, l'estudi del triangle ha estat inseparable del de la circumferència, bàsicament a causa del fet que tot triangle determina una única circumferència en la qual és inscrit (*circumferència circumscrita*). Com a objecte d'aquesta secció ens hem proposat, doncs, fer una revisió d'algunes de les propietats bàsiques del triangle i d'algunes de les relacions més remarcables entre triangles i circumferències.

Propietats bàsiques del triangle

Si ABC és un triangle, posarem a, b, c per indicar els costats oposats a A, B, C, respectivament. Els angles corresponents als vèrtexs es denotaran $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, o α, β, γ; són els angles oposats als costats a, b, c, respectivament. L'altura corresponent al vèrtex A es denotarà h_A o h_a (i, anàlogament, h_B o h_b per al vèrtex B, i h_C o h_c per al vèrtex C). Amb les notacions AB i $[AB]$ indiquem, respectivament, la recta que uneix els punts A i B i el segment (tancat) d'extrems A i B. El corresponent segment obert serà denotat (AB). La longitud del segment $[AB]$ serà denotada AB si pel context no hi ha perill que es pugui confondre amb la recta que uneix A i B; en cas contrari, la denotarem $|AB|$ o $\overline{AB}$.

Igualtat de triangles

Un *desplaçament* és una transformació dels punts del pla que conserva les distàncies (vegeu el subapartat "Desplaçaments", pàg. 18). Dos triangles ABC i $A'B'C'$ es diuen *iguals*, o *congruents*, quan hi ha un desplaçament φ tal que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ i $\varphi(C) = C'$. Per als tres criteris d'igualtat que segueixen, vegeu la figura 1.

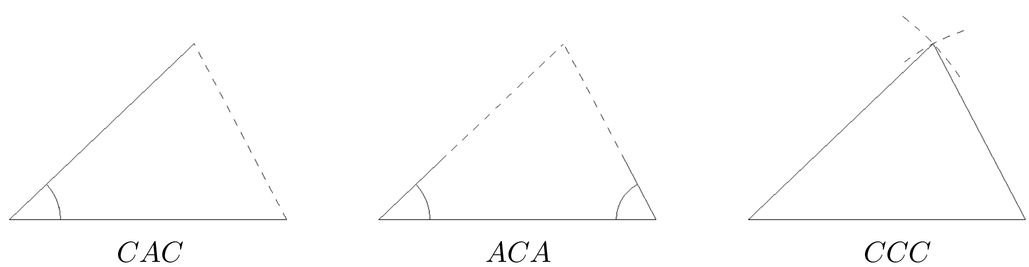


Figura 1: *Criteris d'igualtat de triangles*

Criteri CAC. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, dos costats i l'angle que formen. En particular, dos triangles rectangles són iguals quan els corresponents catets són iguals.

Criteri ACA. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat i els seus dos angles contigus. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals un catet i el corresponent angle agut.

Criteri CCC. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, els tres costats.

Suma dels angles d'un triangle

La suma dels tres angles de qualsevol triangle és π (figura 2).

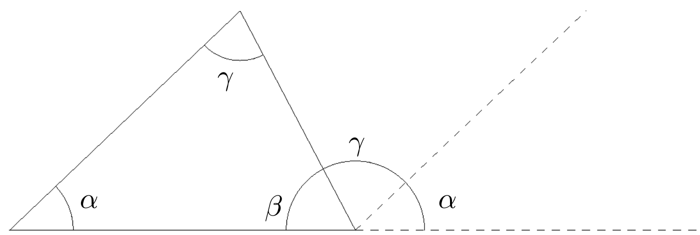


Figura 2: *Suma dels angles d'un triangle*

E. 1 .- Proveu que l'altura sobre el major dels costats d'un triangle és interior al triangle i inferior a les altres dues altures.

E. 2 .- Sigui P el punt a l'interior d'un quadrat $ABCD$ tal que $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 15^\circ$. Demostreu que el triangle ABP és equilàter (indicació: formeu un triangle BCP' congruent amb CDP i amb P' interior al quadrat).

Desigualtat triangular

En un triangle cada costat és inferior a la suma dels altres dos.

E. 3 .- Donat un punt P a l'interior d'un triangle ABC, demostreu que $AP + BP < AC + BC$.

Àrea d'un triangle

S'obté com la meitat del producte d'un costat (base) per la corresponent altura (per exemple, àrea $= \frac{1}{2}ah_A$, on h_A denota l'altura corresponent al vèrtex A). També és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen (per exemple, $h_A = b\sin(\gamma)$ i, per tant, àrea $= \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$). Obervem que si movem un vèrtex sobre la paral·lela a la base oposada, els triangles resultants tenen tots la mateixa àrea.

E. 4 .- Donat un quadrilàter convex $ABCD$, demostreu que la seva àrea és igual a $\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)$, on α és un qualsevol dels dos angles que formen les *diagonals* AC i BD.

E. 5 .- (Teorema de Ceva.) Sigui ABC un triangle i X, Y i Z punts dels segments oberts (BC), (CA) i (AB), respectivament. Demostreu que les rectes AX, BY i CZ són concurrents si i només si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

(si AX, BY i CZ són concurrents en el punt P, proveu que BX/XC és igual al quocient de les àrees dels triangles APB i APC).

D'una recta que uneix un vèrtex A d'un triangle amb un punt del costat oposat $[BC]$, se'n diu una *ceviana* del triangle respecte del vèrtex A.

Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és la suma dels quadrats dels catets. Per a una demostració, vegeu l'exercici que segueix.

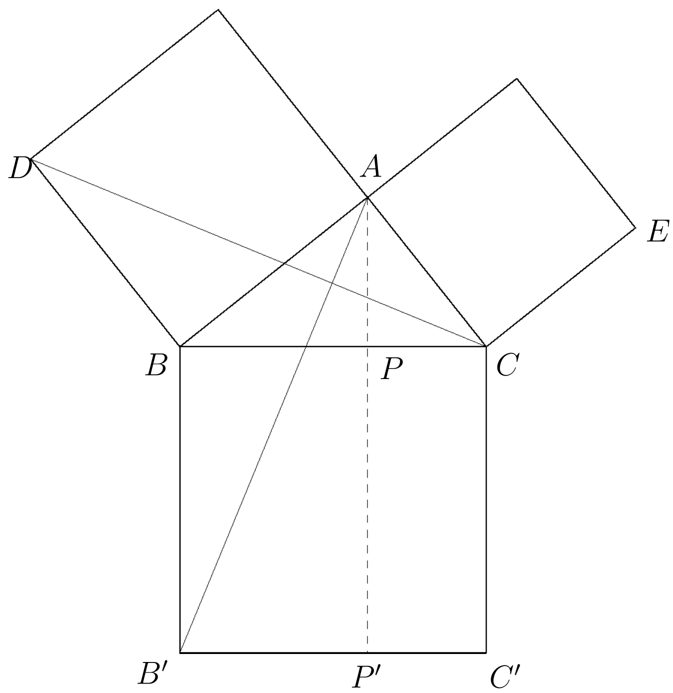


Figura 3: *Teorema de Pitàgores*

E. 6 .- Amb les notacions de la figura 3, mostreu que si el triangle ABC és rectangle, amb A l'angle recte, i AP és l'altura corresponent al vèrtex A, llavors l'àrea del quadrat AD és igual a l'àrea del rectangle $BPP'B'$. Deduïu-ne el teorema del catet (vegeu l'epígraf "Teorema del catet", pàg. 23) i el teorema de Pitàgores.

Teorema del cosinus

En un triangle de costats a, b, c, es compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha),$$

on α és l'angle oposat al costat a (aquest enunciat es dedueix fàcilment a partir del teorema de Pitàgores aplicat als triangles APC i BPC, on P és el peu de l'altura de C).

E. 7 .- Si dos triangles tenen dos parells de costats respectivament iguals i els corresponents angles desiguals, llavors entre els costats oposats a aquests angles hi ha la mateixa relació de desigualtat.

Teorema del sinus

En un triangle de costats a, b i c, i angles α, β i γ, es compleix que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Aquesta propietat surt directament de les definicions: si h és l'altura del vèrtex C d'un triangle ABC, llavors $h = a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$, d'on resulta la primera de les igualtats. Aplicant el mateix raonament als costats b i c, s'obté la segona igualtat. El valor comú dels quocients $a/\sin(\alpha)$, $b/\sin(\beta)$ i $c/\sin(\gamma)$ serà determinat al subapartat "Radi de la circumferència circumscrita", pàg. (27).

E. 8 .- Sigui ABC un triangle i suposem que β' i γ' són angles tals que $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$ i $b/\sin(\beta') = c/\sin(\gamma')$. Demostreu que $\beta' = \beta$ i $\gamma' = \gamma$.

Longitud de les mitjanes

Les *mitjanes* d'un triangle són les rectes que uneixen els seus vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats corresponents.
Si M és el punt mitjà del costat AB i $m = CM$, on ABC és un triangle donat, aplicant el teorema del cosinus als triangles MAC i MBC, i sumant i restant les dues relacions que s'obtenen, s'arriba fàcilment a les dues relacions següents:

$$a^2 + b^2 = 2(\frac{c^2}{4} + m^2),\ \ a^2 - b^2 = 2cd,$$

on d és la distància de M al peu P de l'altura del vèrtex C i on hem suposat $a \geqslant b$.
La primera de les relacions anteriors ens permet trobar la mitjana m en funció dels costats a, b, c:

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

E. 9 .- Si en un triangle dues mitjanes són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

E. 10 .- Siguin A i B dos punts, M el seu punt mitjà, $c = AB$ i $k \geqslant c^2/2$ un nombre real. Proveu que la circumferència de centre M i radi $\sqrt{k/2 - c^2/4}$ coincideix amb el lloc geomètric dels punts tals que la suma dels quadrats de les seves distàncies a A i a B és igual a k.

E. 11 .- Amb les mateixes notacions i hipòtesis que en l'exercici anterior, proveu que el lloc geomètric dels punts tals que la diferència dels quadrats de les seves distàncies a B i a A és igual k, coincideix amb la recta perpendicular a AB pel punt del segment $[AM]$ que és a la distància $k/(2c)$ de M.

Alguns punts associats a un triangle

En cada triangle es poden considerar diversos punts que tenen, cada un d'ells, una relació geomètrica remarcable amb el triangle. En aquest apartat considerarem el circumcentre, l'ortocentre, l'incentre i els excentres. Més endavant n'estudiarem d'altres.

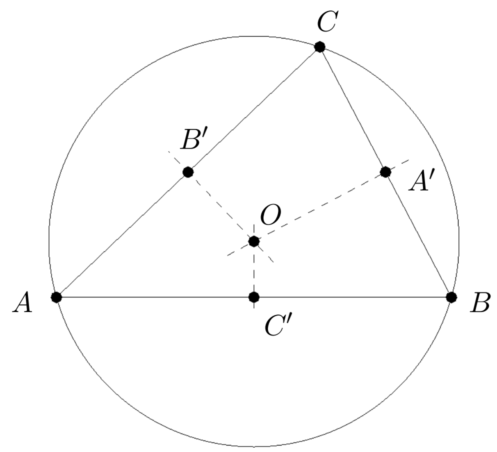


Figura 4: *Circumcentre*

Circumcentre

Les mediatrius dels costats d'un triangle ABC es tallen en un punt, O, anomenat *circumcentre* del triangle (la *mediatriu* d'un segment és la recta perpendicular pel seu punt mitjà; els seus punts són precisament els que equidisten dels extrems del segment). Així, doncs, el punt O equidista dels tres vèrtexs i és, per tant, el centre de l'única circumferència que passa per ells. Aquesta circumferència s'anomena *circumferència circumscrita* del triangle ABC. També ens hi referim dient que és ®la circumferència ABC^- (figura 4).

Ortocentre i triangle òrtic

Les altures d'un triangle es tallen en un punt, H, anomenat *ortocentre* del triangle (figura 5).

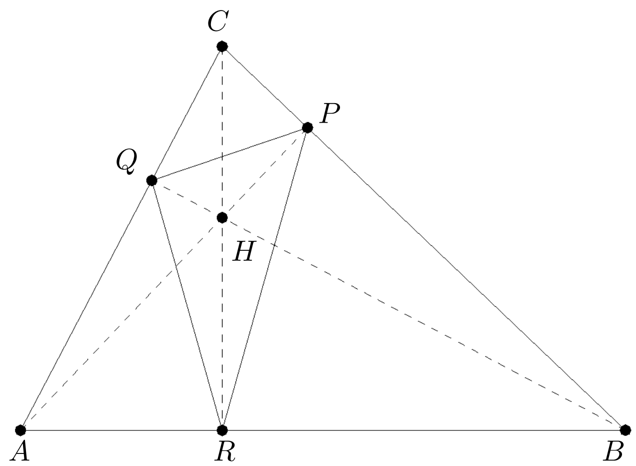


Figura 5: *Ortocentre i triangle òrtic*

Aquesta propietat és una senzilla conseqüència de l'exercici que segueix. El triangle PQR els vèrtexs del qual són els peus de les altures d'un triangle donat ABC s'anomena *triangle òrtic* de ABC.

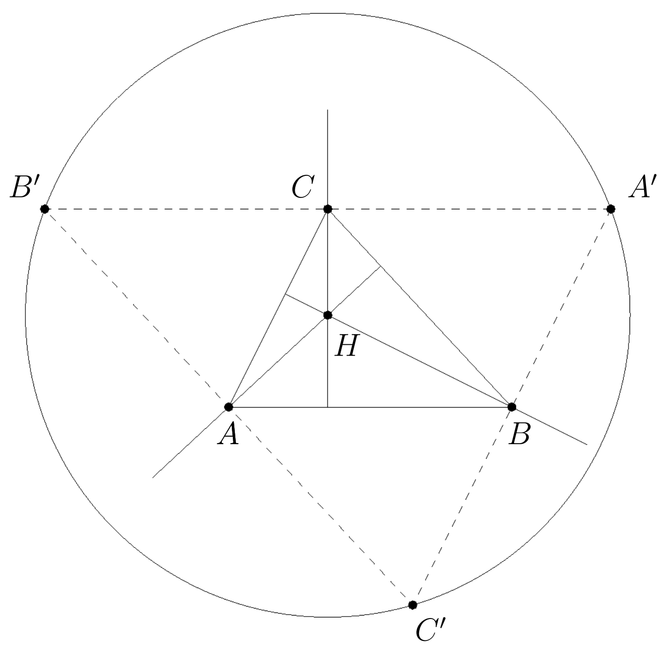


Figura 6: *Circumcentre $A'B'C'$ = ortocentre ABC*

E. 12 .- Proveu que les altures d'un triangle són les mediatrius del triangle els costats del qual són les paral·leles pels vèrtexs del primer triangle als corresponents costats oposats (figura 6).

Incentre

Les bisectrius dels angles d'un triangle es tallen en un punt, I, anomenat *incentre* del triangle (figura 7).

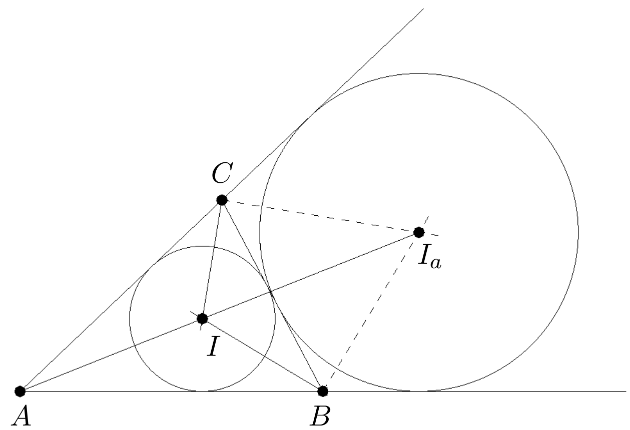


Figura 7: *Incentre i excentre*

La *bisectriu* d'un angle és la recta que el divideix en dos angles iguals; els seus punts són precisament els que equidisten dels dos costats de l'angle. Així, doncs, el punt I equidista dels tres costats i és, per tant, el centre de la *circumferència inscrita* al triangle, és a dir, la circumferència que és tangent als tres costats.

Excentres

Les bisectrius exteriors de dos angles B i C d'un triangle es tallen en un punt I_a que equidista de les perllongacions dels dos costats (c i b) del tercer angle A i del costat a oposat a A. Per tant, la bisectriu de A també passa per I_a, i així I_a és el centre d'una circumferència que és tangent al costat a del triangle i a les perllongacions de b i c (vegeu la figura 7). Es diu que el punt I_a és l'*excentre* del triangle relatiu al costat a. Els excentres I_b i I_c es defineixen anàlogament. Del fet que la bisectriu i la bisectriu exterior d'un angle d'un triangle siguin perpendiculars [$\diamond$], se'n dedueix sense dificultat que les bisectrius d'un triangle són les altures del triangle $I_aI_bI_c$.

Circumferències i angles

La relació que hi ha entre un angle i una circumferència té propietats i aplicacions remarcables. Aquesta secció en conté una mostra.

Angle inscrit en una circumferència

Un angle inscrit en una circumferència (és a dir, un angle el vèrtex del qual està sobre la circumferència) és la meitat de l'angle central corresponent a l'arc comprès per aquell. És clar, doncs, que el valor de l'angle només depèn de l'arc que comprèn i no de la posició del seu vèrtex sobre la circumferència (figura 8).

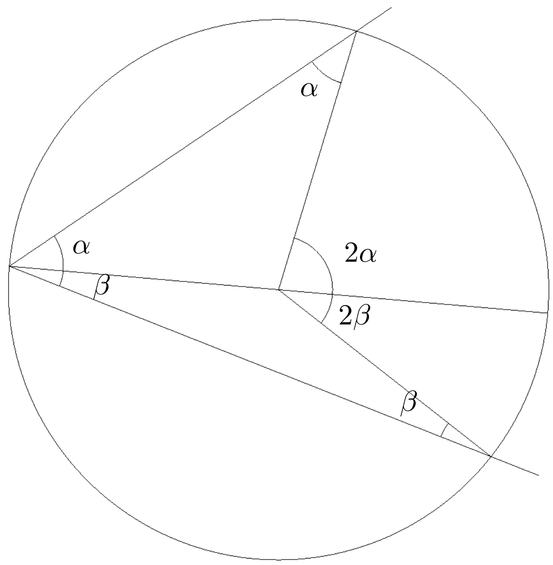


Figura 8: *Angles inscrits en una circumferència*

E. 13 .- Dos triangles rectangles amb la mateixa hipotenusa tenen la mateixa circumferència circumscrita. A més, el centre d'aquesta circumferència és el punt mitjà de la hipotenusa compartida.

E. 14 .- Donat un triangle ABC, siguin $P, V \in [BC]$ el peu de l'altura de A i el punt d'intersecció de la bisectriu de $\widehat{A}$ amb BC. Siguin D i E els peus de les perpendiculars a AB i AC per P i V, respectivament. Demostreu que si $\alpha = \widehat{A}/2$, llavors $\widehat{DPB} = \widehat{EPC} = \alpha$.

Un angle inscrit en una circumferència és recte quan l'arc que comprèn és una semicircumferència (vegeu la figura 9.a). Aquesta propietat es pot usar per trobar les tangents a una circumferència C des d'un punt P exterior: són (figura 9.b) les rectes que uneixen P amb els punts d'intersecció de C amb la circumferència que té per diàmetre el segment OP, on O és el centre de C.

Angle interior i angle exterior

Un angle el vèrtex del qual és exterior a una circumferència i els dos costats del qual la tallen (s'admet també que un costat de l'angle, o els dos, siguin tangents), és la semidiferència dels dos angles centrals corresponents als dos arcs de la circumferència determinats per l'angle.

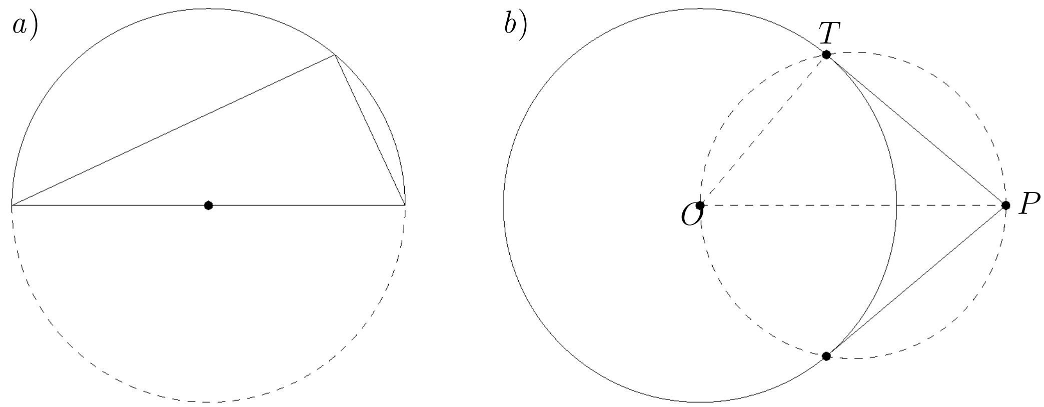


Figura 9: *a) Angle recte inscrit. b) Tangents des d'un punt a una circumferència*

Aquesta propietat és una conseqüència immediata del fet que un angle interior x d'un triangle és, amb les notacions de la figura 10.a, la diferència dels angles α i β.
Anàlogament, un angle, el vèrtex del qual és interior a una circumferència, és la semisuma dels angles centrals corresponents als dos arcs determinats per l'angle (figura 10.b).

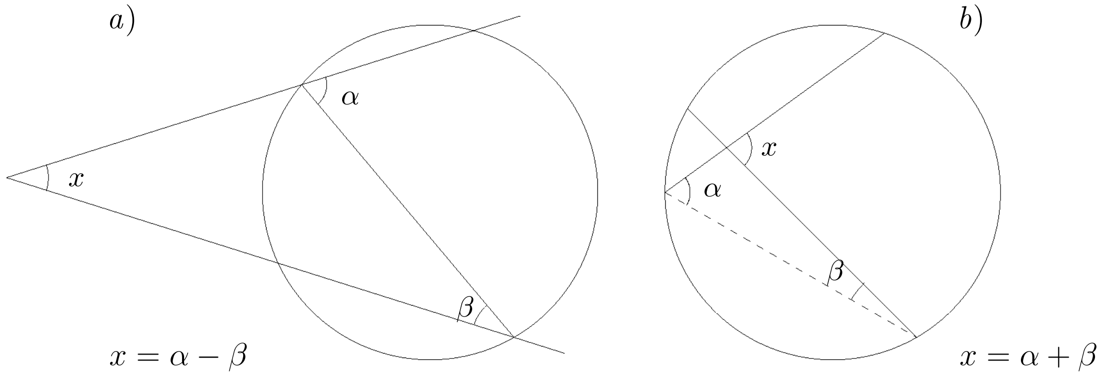


Figura 10: *Angles exterior i interior a una circumferència*

Arc capaç

Donat un segment AB i un angle α, el lloc geomètric dels punts P d'un dels semiplans definits per AB i tals que $\widehat{APB} = \alpha$, és un arc de circumferència els extrems del qual són A i B (d'aquest arc, se'n diu que és l'*arc capaç* de l'angle α respecte del segment AB). Vegem com es pot construir.
Suposem primer que $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Sobre la mediatriu de AB (vegeu la figura 11), i en el semiplà en qüestió (a la figura 11 suposem que és el semiplà per sobre de AB), considerem el punt O tal que $\widehat{AOM} = \alpha$, on M és el punt mitjà de AB. Llavors, els punts P de la circumferència de

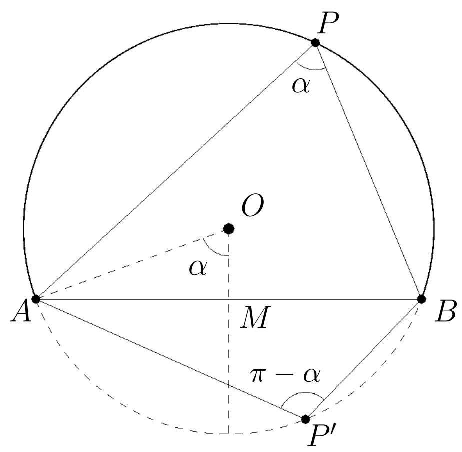


Figura 11: *Arc capaç d'un angle respecte d'un segment*

centre O i radi OA que pertanyen a l'esmentat semiplà són precisament els que compleixen $\widehat{APB} = \alpha$ i formen, amb les notacions de la figura 11, l'arc APB. Si ara ens fixem que l'arc $AP'B$ és el capaç de $\pi - \alpha$ respecte de AB en el semiplà oposat, esdevé també clar com podem construir l'arc capaç d'un angle $\beta \in (\pi, 2\pi]$.

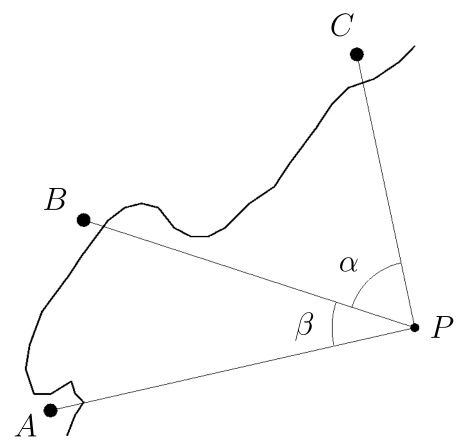


Figura 12: *Un vaixell determina la seva posició*

E. 15 .- A la figura 12, un vaixell situat al punt P ignora les coordenades d'aquesta posició, però mitjançant un mapa pot obtenir les dels punts A, B i C situats a la costa i mitjançant un goniòmetre pot determinar els angles α i β. Podeu obtenir les coordenades de P, sabent que $A = (6, 5)$, $B = (10, 28)$, $C = (43, 48)$, $\alpha = 1,04754$ rad i $\beta = 0,53791$ rad?

Criteri CAA

Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat, un angle contigu a aquest costat i l'angle oposat. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals les hipotenuses i un angle agut. Aquestes afirmacions es poden obtenir aplicant el subapartat anterior. En particular, la construcció d'un triangle, del qual coneixem un costat, un dels seus angles contigus i l'angle oposat, es pot fer fàcilment construint l'arc capaç de l'angle oposat.

2 Semblances

En la geometria clàssica, les idees relacionades amb la noció de semblança de figures hi tenen un paper important. Per les necessitats d'aquest capítol, els enunciats més útils són els següents *criteris de semblança de triangles*:

Criteri CAC. Dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els corresponents costats proporcionals.

Criteri AA. Dos triangles són semblants si tenen iguals dos angles corresponents.

Criteri CCC. Dos triangles són semblants si els corresponents costats són proporcionals.

El lector que no tingui dubtes sobre el significat d'aquests criteris, pot ometre l'apartat que segueix i continuar la lectura a l'apartat "Semblances i geometria del triangle".

Generalitats

En aquest apartat exposem breument els conceptes i enunciats més rellevants relatius a les semblances. Primer considerem els desplaçaments. Després el teorema de Tales, que és l'eina essencial per a l'estudi de les homotècies, i tot seguit les semblances en general. Finalment, revisem les relacions que hi ha entre el producte dels nombres complexos i les semblances.

Desplaçaments

Un *desplaçament* del pla és una transformació que conserva les distàncies. Els desplaçaments conserven els angles. Un desplaçament es diu *directe* si conserva l'orientació del pla; altrament, es diu *invers*. Les translacions i els girs són exemples de desplaçaments directes. Donats dos punts P i P', posarem $t_{PP'}$ per denotar l'única translació que transforma P en P'. Donats un punt O i un angle α, el gir de centre O i amplitud α serà denotat $g_{O,\alpha}$.
Les simetries són exemples de desplaçaments inversos. La *simetria* respecte de la recta ℓ serà denotada s_ℓ: és la transformació $P \mapsto P'$ tal que P' és el simètric de P respecte de ℓ. La recta ℓ s'anomena *eix* de la simetria.
Es pot veure que els punts fixos d'un desplaçament directe el classifiquen, en el sentit següent: si no té punts fixos, és una translació; si té exactament un punt fix, és un gir; si té més d'un punt fix és la identitat. Pel que fa als desplaçaments inversos, hi ha dos casos: si té punts

fixos, es tracta d'una simetria; altrament, és la composició ts_ℓ d'una simetria s_ℓ amb una translació t en la direcció de l'eix ℓ (es parla d'una *simetria amb lliscament*).

E. 16 .- Siguin s i s' les simetries respecte de les rectes ℓ i ℓ'. Per estudiar quin desplaçament és la composició $s's$, sigui α l'angle format per ℓ i ℓ' i posem O per denotar el punt d'intersecció de ℓ i ℓ' quan $\alpha \neq 0$, i d per denotar la distància entre ℓ i ℓ' quan $\alpha = 0$ (rectes paral·leles). Demostreu que $s's$ és el gir de centre O i amplitud 2α si $\alpha \neq 0$, i la translació de magnitud $2d$ segons la direcció perpendicular de ℓ a ℓ' si $\alpha = 0$. Noteu que $s's$ es la identitat si $\ell = \ell'$.

E. 17 .- Sigui ABC un triangle i construïm quadrats $ACES$ i $BCDT$ com a la figura 13. Demostreu que el punt M d'intersecció de l'altura h_C amb ED és el punt mitjà del segment ED.

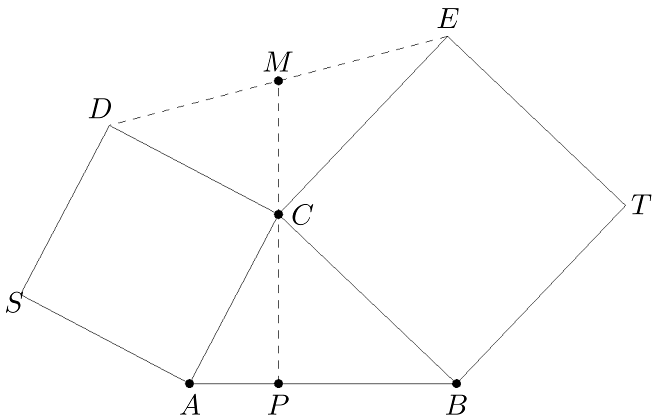


Figura 13: *L'altura de C passa pel punt mitjà de DE*

Teorema de Tales

Si dues rectes són tallades per un sistema de rectes paral·leles, els segments així obtinguts sobre una de les rectes són proporcionals als corresponents segments obtinguts sobre l'altra (figura 14).

E. 18 .- Si a la figura 14 les rectes L i L' són paral·leles i $x/x' = y/y'$, llavors L'' també és paral·lela a L.

E. 19 (Teorema de Menelau)**.-** Sigui ABC un triangle i X, Y i Z punts sobre les rectes BC, CA i AB, respectivament. Demostreu que X, Y i Z estan alineats si i només si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1;$$

convenim que un quocient com ara BX/CX és positiu o negatiu segons que X sigui exterior o interior al segment $[BC]$ (indicació: si X, Y i Z estan sobre una recta L i d_A, d_B i d_C indiquen les distàncies de A, B i C a L, respectivament, amb el convenció que aquestes

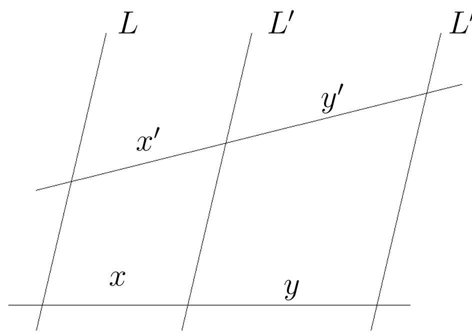


Figura 14: *Teorema de Tales:* $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \cdots$

distàncies es compten com a positives a un costat de L i com a negatives a l'altre, llavors es compleix la relació $BX/CX = d_B/d_C$, i les anàlogues per Y i Z).

Homotècies

L'*homotècia de centre* O (un punt) *i mòdul* o *raó* k (un nombre real no nul) és la transformació $A \mapsto A'$ tal que $O' = O$ i, si $A \neq O$, A' és el punt de la recta OA tal que $OA'/OA = k$ (aquí fem el convenció que A' és de la semirecta OA si $k > 0$ i de la semirecta oposada a OA si $k < 0$). Els enunciats que segueixen es proven fàcilment emprant el teorema de Tales i l'exercici E.18.

La transformació d'una recta per una homotècia és una recta paral·lela a la primera. Val un enunciat anàleg per segments. D'aquí en resulta que angles homòlegs per una homotècia són iguals.

Les rectes pel centre d'homotècia són fixes, i són les úniques rectes fixes si $k \neq 1$ (si $k = 1$, l'homotècia és la identitat).

Segments homòlegs per una homotècia són proporcionals segons el valor absolut $|k|$ de la raó d'homotècia. D'aquí resulta que la transformació de la circumferència de centre P i radi r per l'homotècia h de raó k és la circumferència de centre $h(P)$ i radi $|k|r$.

E. 20 .- Dos triangles no congruents són homotètics si els costats d'un són paral·lels als corresponents costats de l'altre.

E. 21 .- Dues circumferències sempre són homotètiques i els seus centres estan alineats amb el centre de qualsevol homotècia que transformi l'una en l'altra.

Figures semblants

Dues figures són semblants si una es pot obtenir de l'altra mitjançant la composició d'una homotècia i un desplaçament. Una semblança transforma rectes en rectes i segments en segments. Segments homòlegs són proporcionals i angles homòlegs són iguals. Una semblança es diu *directa* o *inversa* segons que conservi l'orientació del pla o la inverteixi.

E. 22 .- Proveu els criteris de semblança de triangles enunciats al principi d'aquesta secció.

Raó àuria. Donat un segment de longitud $a > 0$, el seu *segment auri* és el segment de longitud $x > 0$ tal que $a/x = x/(a-x)$. Com que aquesta relació és equivalent a l'equació $x^2 + ax - a^2 = 0$, obtenim que $x = \rho a$, on

$$\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

El nombre real ρ s'anomena la *raó àuria*. Com que $\rho^2 + \rho - 1 = 0$, resulta que

$$\rho^{-1} = 1 + \rho = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Un *rectangle auri* és aquell pel qual la base menor és segment auri de la base major. Això equival a dir que el rectangle és semblant al que resulta de separar-ne el quadrat de costat la base menor (figura 15).

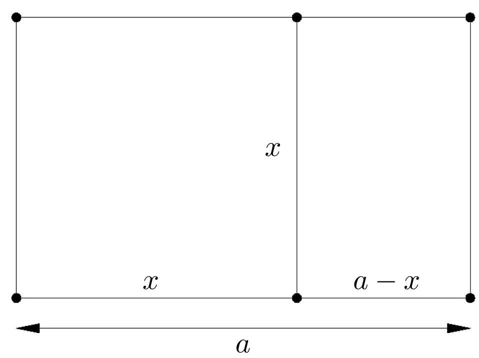


Figura 15: *Rectangle auri*

Semblances i nombres complexos

Si representem els punts del pla per nombres complexos, i $w = r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$ és el nombre complex de mòdul r i argument α, llavors la transformació $z \mapsto wz$ és la composició del gir d'angle α amb centre a l'origen seguit de l'homotècia de raó r amb el mateix centre. La raó d'això és que el mòdul i l'argument d'un producte de dos nombres complexos són el producte i la suma dels mòduls i arguments dels factors, respectivament ($|wz| = |w||z|$ i $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(w)$).

E. 23 .- Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles i interpretem $B - A$, $C - A$, $B' - A'$ i $C' - A'$ com a nombres complexos. Demostreu que ABC i $A'B'C'$ són directament semblants si i només si $(C' - A')/(B' - A') = (C - A)/(B - A)$.

E. 24 .- Siguin $A_1A_2A_3$ i $A'_1A'_2A'_3$ dos triangles directament semblants. Sigui $t \in \mathbf{R}$ fix i definim $A''_i = A_i + t(A'_i - A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Demostreu que els triangles $A_1A_2A_3$ i $A''_1A''_2A''_3$

són directament semblants. Val la mateixa conclusió si tenim, en lloc de triangles, figures directament semblants $A_1A_2\ldots A_k$ i $A'_1A'_2\ldots A'_k$ i definim A''_i com abans per $i = 1, 2, \ldots, k$ (a la figura 16 il·lustrem el cas en què la figura és un pentàgon regular).

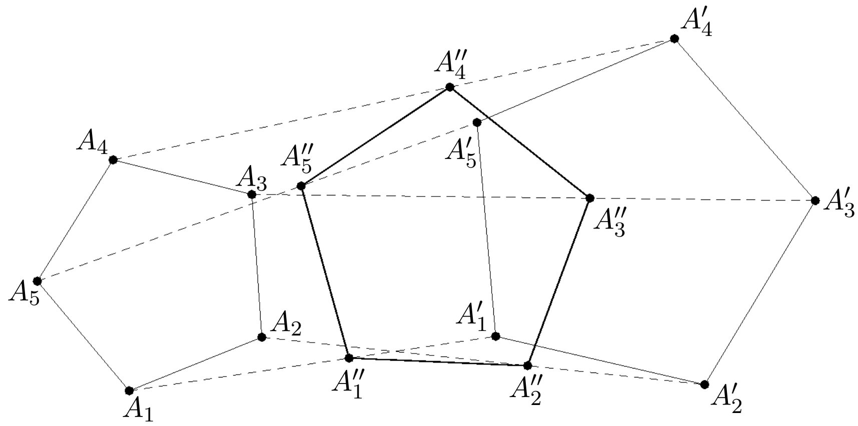


Figura 16: *A''_i divideix $A_iA'_i$ en la proporció* $3/5$

En la resta d'aquesta secció presentem, agrupades en dos apartats, un nombre de situacions geomètriques en les quals les semblances són l'element decisiu per provar els enunciats.

Semblances i la geometria del triangle

Vegem tot seguit algunes de les aplicacions més bàsiques de les semblances a l'estudi de les propietats del triangle.

Mitjanes i baricentre

Les tres mitjanes es tallen en un punt, G, anomenat *baricentre* del triangle. Si A és un vèrtex qualsevol i A' el punt mitjà del costat oposat a A, llavors $GA = 2GA'$ o, equivalentment, $AA' = 3GA'$ (vegeu la figura 17 i noteu que els triangles ABG i $A'B'G$ són semblants, pel criteri AAA de semblança, i que $A'B' = \frac{1}{2}AB$).

Teorema de l'altura

L'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és la mitjana proporcional entre els dos segments en què el peu de l'esmentada altura divideix la hipotenusa. En símbols, $CP^2 = AP \cdot BP$, on el triangle ABC se suposa rectangle en el vèrtex C i on P és el peu de l'altura del vèrtex C (vegeu la figura 18). En efecte, els triangles BPC i CPA són semblants, ja que tenen els tres angles iguals (recordem que dos angles són iguals si els seus corresponents costats són perpendiculars). Així, doncs, $x/h = h/(a - x)$, igualtat que equival a la relació enunciada.

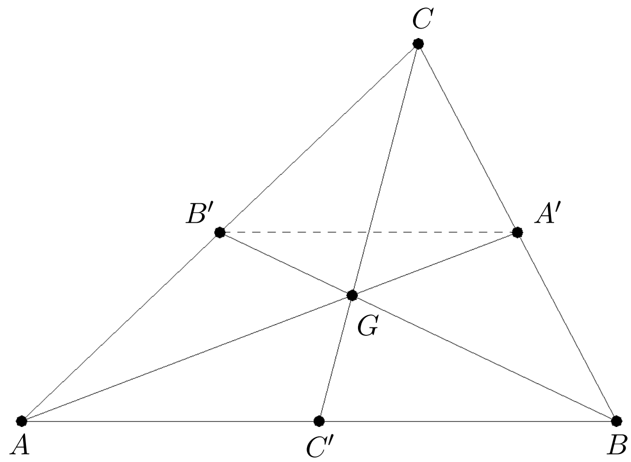


Figura 17: *Baricentre d'un triangle*

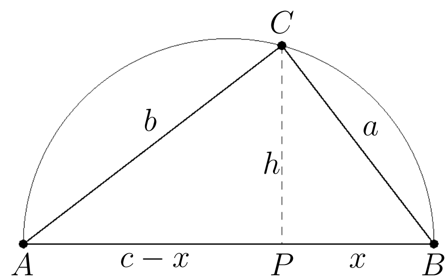


Figura 18: *Teoremes de l'altura i del catet*

Teorema del catet

Amb les mateixes notacions de la figura 18, els triangles BPC i BCA són semblants, ja que són rectangles i tenen un angle comú. Per tant, $x/a = a/c$, la qual cosa ens diu que en un triangle rectangle la longitud d'un catet, per exemple a, és la mitjana proporcional entre la hipotenusa, c, i la projecció del catet, x, sobre aquella. Per a una altra demostració, i també una interpretació, vegeu l'exercici E.6.

Així, tenint en compte el subapartat anterior, tenim que els triangles rectangles ABC, ACP i CBP són semblants. És clar, a més a més, que l'àrea de ABC és la suma de les àrees de ACP i CBP. Això ens proporciona una nova comprensió del teorema de Pitàgores: si el quocient de l'àrea del quadrat de costat AB per la del triangle ABC és k, és a dir, si $c^2 = k \cdot ABC$, llavors $a^2 = k \cdot CBP$ i $b^2 = k \cdot ACP$, d'on $a^2 + b^2 = k(CBP + ACP) = k \cdot ABC = c^2$. Notem que aquest argument prova que si apliquem una mateixa construcció sobre la hipotenusa i els catets d'un triangle rectangle (suposant que la construcció proporcioni una àrea a partir d'un segment), llavors l'àrea de la figura sobre la hipotenusa és la suma de les àrees de les figures sobre els catets.

Per exemple, si la construcció és la del polígon regular de $n \geqslant 3$ costats sobre un segment donat, obtenim que l'àrea del n-gon regular de costat la hipotenusa d'un triangle rectangle és

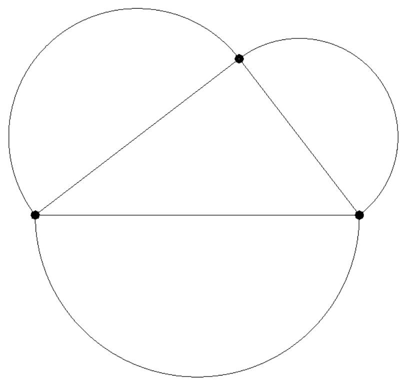


Figura 19: *Teorema de Pitàgores per semicercles*

la suma de les àrees dels n-gons regulars els costats dels quals són els catets. Anàlogament, tenim que l'àrea del semicercle que té per diàmetre la hipotenusa és la suma de les àrees dels semicercles que tenen per diàmetre els catets (figura 19).

Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui P un punt i C una circumferència que no passa per P. Considerem dues rectes per P que tallen C en els punts A i A', B i B', respectivament (figura 20). Aleshores els triangles PAB' i PBA' són semblants, ja que tenen dos angles iguals, i per tant $PA/PB = PB'/PA'$, o bé $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Així doncs, el producte $PA \cdot PA'$ és independent de la recta que prenguem per P (entre les que tallen C) i el seu valor s'anomena *potència de* P respecte de C. Prenent la recta que passa per P i pel centre de C, veiem que la potència és igual a $(d-r)(d+r) = d^2 - r^2$, on d és la distància de P al centre de C i r el radi de C.

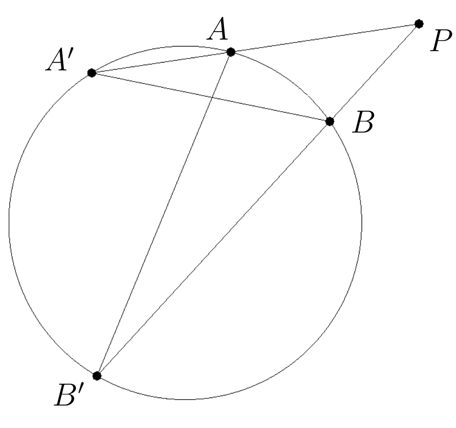


Figura 20: *Potència d'un punt respecte d'una circumferència*

Punts concíclics. Ara no hi ha dificultat a deduir que si A i A', B i B', són dues parelles de punts distints i les rectes AA' i BB' es tallen en un punt P, aleshores els punts A, A', B i B' són *concíclics* (això és, estan continguts en una mateixa circumferència) si i només si $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

Eix radical. El lloc geomètric dels punts que tenen la mateixa potència respecte de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la que uneix els seus centres O_1 i O_2, i s'anomena *eix radical* de les dues circumferències. En efecte, siguin d_1 i d_2 les distàncies d'un punt P als centres de les dues circumferències, i siguin r_1 i r_2 els seus radis. La condició que la potència de P sigui la mateixa respecte de les dues circumferències és $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$, o bé $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Com que $\delta = r_1^2 - r_2^2$ és constant, el lloc geomètric és el dels punts P tals que $d_1^2 - d_2^2 = \delta$, que sabem que és la recta perpendicular a O_1O_2 pel punt que està a la distància $\delta/(2c)$ del punt mitjà del segment $[O_1, O_2]$, on c és la distància entre O_1 i O_2 (vegeu l'exercici E.11). És a dir, la posició del punt d'intersecció de l'eix radical amb la recta O_1O_2 és $m + (r_1^2 - r_2^2)/(2c)$.
Si les dues circumferències es tallen, l'eix radical és la recta que uneix els dos punts d'intersecció (o la tangent comuna si són tangents). En efecte, els punts d'intersecció tenen la mateixa potència ($= 0$) respecte de les dues circumferències.

Centre radical. El *centre radical* de tres circumferències que no tenen els centres alineats és l'únic punt que té la mateixa potència respecte de les tres circumferències. Aquest punt és la intersecció de dos qualssevol dels eixos radicals de les tres parelles de circumferències que podem formar.

Propietats mètriques de les bisectrius

Considerem el triangle ABC de la figura 21.

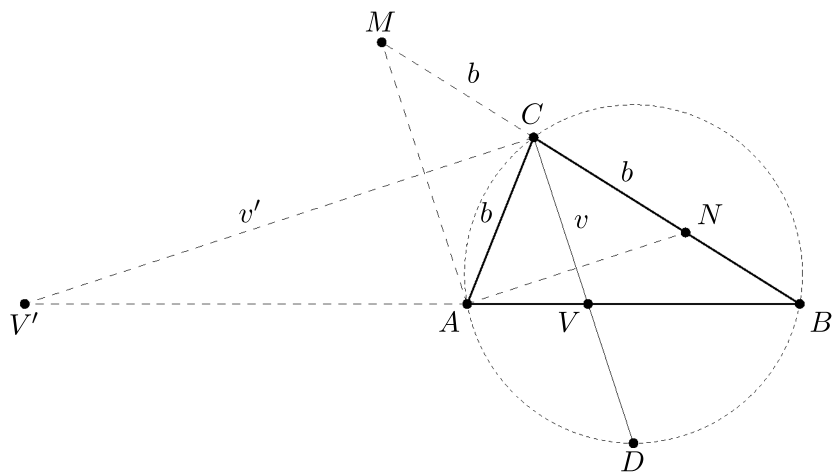


Figura 21: *Determinació de les bisectrius*

Sigui M el punt sobre BC, a continuació de C, tal que $CM = b$. Per construcció, el triangle ACM és isòsceles. Per tant, la bisectriu v' de $\widehat{ACM}$ és perpendicular a la base AM. Com que la bisectriu v és perpendicular a v', v és paral·lela a AM. Aplicant el teorema de Tales, obtenim que

$$\frac{BV}{a} = \frac{VA}{b} = \frac{c}{a+b}.$$

Considerant el punt N del segment BC tal que $NC = b$, resulta que AN és paral·lela a v', i raonant de manera similar, obtenim que

$$\frac{BV'}{a} = \frac{AV'}{b} = \frac{c}{a-b}.$$

Per altra banda, no és difícil veure que si D és el punt d'intersecció de la semirecta CV amb el cercle ABC, llavors els triangles AVC i DBC són semblants (tenen dos angles iguals: un per definició de bisectriu, l'altre pel fet de ser angles inscrits que comprenen el mateix arc BC de la circumferència ABC). En resulta que $a/v = (v+VD)/b$, o bé $ab = v^2 + v \cdot VD$. Però com que $v \cdot VD = VA \cdot VB = abc^2/(a+b)^2$, tenim que

$$v^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = 4ab\frac{p(p-c)}{(a+b)^2}$$

on hem posat $p = (a+b+c)/2$ (el *semiperímetre* del triangle).

E. 25 (Steiner–Lehmus)**.-** Si en un triangle dues bisectrius són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

Radi de les circumferències inscrita i exinscrita

Considerem la figura 22. Si posem $p = (a+b+c)/2$, aleshores es compleix que $AB' = AC' = p-a$: la primera igualtat és clara i la segona resulta del fet que $AB'+a = AB'+CA'+A'B = AB'+CA'+BC' = p$. De la mateixa manera tenim que $BA' = BC' = p-b$ i $CA' = CB' = p-c$. També tenim $AB'' = AC''$ i com que $AB'' = AC + CA''$ i $AC'' = AB + BA''$, veiem que $AB'' = AC'' = p$ [$\diamond$]. Per tant $BA'' = BC'' = p-c$ i $CB'' = CA'' = p-b$. Finalment, $C'C'' = B'B'' = AB''-AB' = p-(p-a) = a$ i $A'A'' = |BA'-BA''| = |p-b-(p-c)| = |b-c|$.

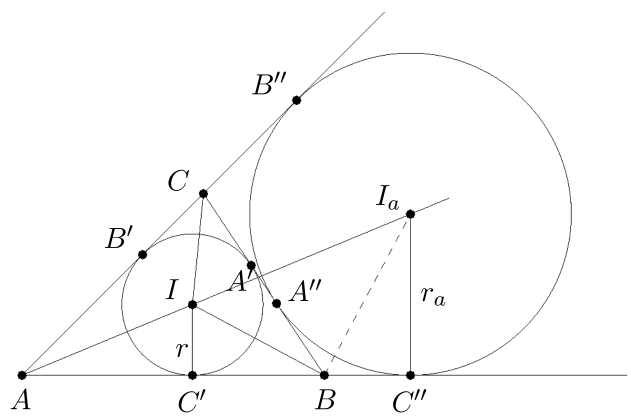


Figura 22: *Radi de les circumferències inscrita i exinscrita*

Atès que els triangles AIC' i AI_aC'' són semblants, serà $r/r_a = (p-a)/p$. I atès que els triangles BIC' i I_aBC'' també són semblants, $r/(p-b) = (p-c)/r_a$, o bé $rr_a = (p-b)(p-c)$. De les dues equacions obtingudes es dedueix que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Els radis r_b i r_c de les altres dues circumferències exinscrites s'obtenen permutant cíclicament a, b i c en la segona de les fórmules anteriors.

Expressió de les altures en funció dels costats

Considerem la figura 23, en la qual N i M es defineixen de manera que estiguin alineats amb A i B, respectivament, amb $BM = BC$ i $AN = AC$. Així doncs, $NM = a + b + c = 2p$. Per les consideracions fetes al subapartat "Propietats mètriques de les bisectrius" (pàg. 25), sabem que CM (respectivament, CN) és paral·lela a la bisectriu interior IB (respectivament, IA), de manera que els triangles AIB i NCM són semblants. En resulta que $h_c/r = 2p/c$, d'on

$$h_c = 2pr/c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Canviant c per b i per a s'obtenen les fórmules que donen h_b i h_a.
D'aquestes expressions és clar que l'àrea S del triangle és donada per la fórmula d'Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

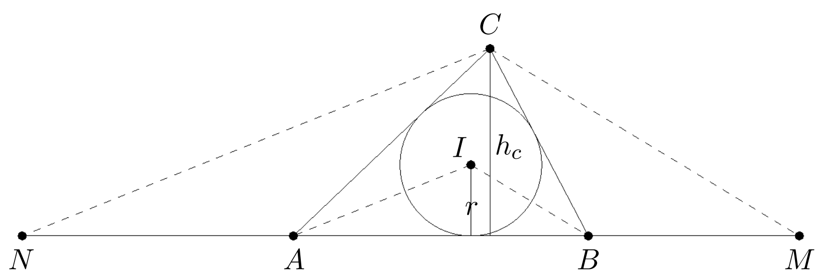


Figura 23: *Altures en funció dels costats*

Radi de la circumferència circumscrita

Considerem la figura 24. Els triangles APC i $AC'O$ són semblants: els dos són rectangles i $\widehat{AOC'}$ és la meitat de l'arc central comprès per l'angle inscrit $\widehat{ACB}$. Així, doncs, $AO/AC' = AC/AP$, o bé $\rho/(c/2) = b/h_a$. Per tant, $\rho = bc/2h_a$ i, introduint l'expressió de h_a en funció dels costats,

$$\rho = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

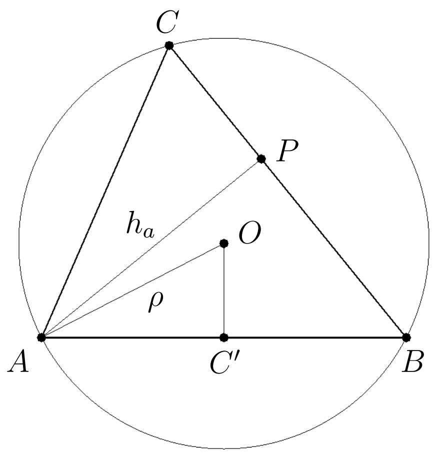


Figura 24: *Radi de la circumferència circumscrita*

Notem també que si $\gamma = \widehat{C}$ i $c = AB$, llavors $c/\sin(\gamma) = 2AC'/\sin(\gamma) = 2\rho$, ja que $AC'/\rho = \sin(\gamma)$. Això ens revela que el valor $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$ (teorema dels sinus) és 2ρ, el diàmetre de la circumferència circumsrita.

Inversions

Donat un punt O i un nombre real $\rho \neq 0$, la *inversió de centre O i potència ρ*, $\mathit{inv}_{O,\rho}$, és l'aplicació $A \mapsto A'$ $(A \neq O)$, definida per la fórmula

$$A' - O = \frac{\rho}{|OA|^2}(A - O).$$

Així A' és el punt que està sobre la recta OA, a una distància $|\rho|/|OA|$ de O, a la mateixa semirecta que A si $\rho > 0$ i a la semirecta oposada si $\rho < 0$. Atès que $|OA'| = |\rho|/|OA|$, tenim $A'' = A$ (ho expressarem dient que la $\mathit{inv}_{O,\rho}$ és *involutiva*).
Si $\rho > 0$ i posem $r = \sqrt{\rho}$, llavors els punts A que $\mathit{inv}_{O,\rho}$ deixa fixos són els de la circumferència de centre O i radi r, ja que si $|OA| = r$ llavors $\rho/|OA|^2 = 1$. En aquest cas es diu també que $\mathit{inv}_{O,\rho}$ és la inversió respecte de la circumferència $S = S(O, r)$ de centre O i radi r, i que A' és l'*invers* de A respecte de S. Pel que ja hem dit, també es té que A és l'invers de A' respecte de S.

Construcció. El punt A' invers de A respecte de S es pot construir de la següent manera. Suposem primer que $|OA| > r$. Si P i Q són els punts d'intersecció de la circumferència de centre A i radi $|OA|$ amb S, llavors els punts d'intersecció de les circumferències de radi r amb centres a P i Q són O i A' (figura 25).
En efecte, els triangles AOP i OPA' són semblants, ja que per construcció són isòsceles i comparteixen l'angle del vèrtex O. Per tant, $|OA|/|OP| = |OP|/|OA'|$, que equival a $|OA| \cdot |OA'| = r^2$, on $r = |OP|$. Per construir l'invers d'un punt interior de S respecte de S, és suficient veure com podem reconstruir el punt exterior A a partir de A'. Ara bé, amb les notacions anteriors, PQ és la mediatriu de OA' i A és la intersecció de les tangents a S en els punts P i Q.

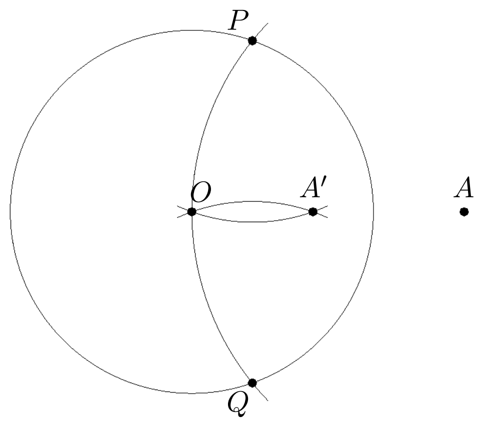


Figura 25: *Construcció de l'invers de A*

Inversió de rectes i circumferències. Una figura F' es diu inversa d'una figura F respecte de la circumferència S si quan A recorre els punts de F (diferents del centre O de S), el punt A' invers de A respecte de S recorre els punts de F' (diferents de O). Si $F' = F$, direm que la figura F és *doble* per la inversió. Per exemple, els punts dobles són els fixos per la inversió, és a dir, els punts de S; per tant, S és una circumferència doble; de la definició d'inversió, en resulta immediatament que les rectes per O són dobles.

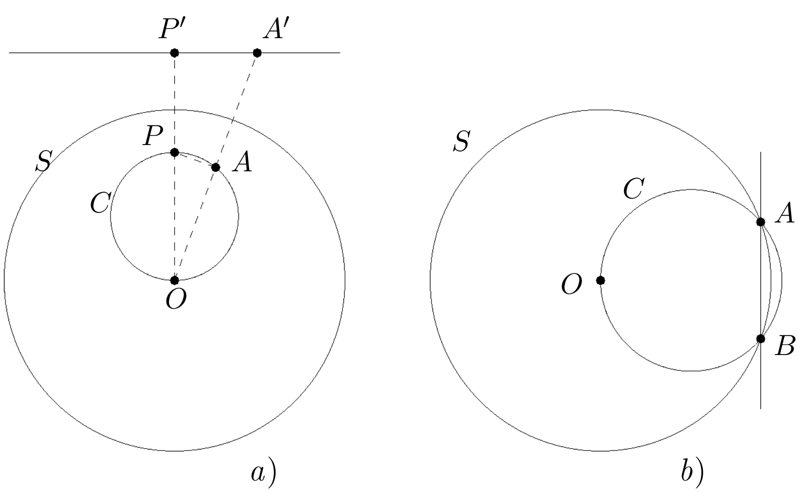


Figura 26: *Inversa d'una circumferència pel centre d'inversió*

Una circumferència C de diàmetre d pel centre d'inversió O (figura 26.a) i la recta perpendicular $P'A'$ al diàmetre OP de C a una distància $d' = r^2/d$ de O, són figures inverses (notem que OP és l'únic diàmetre de C que passa per O). En efecte, els triangles OPA i $OA'P$ són semblants, ja que són rectangles (a A i P', respectivament) i tenen un angle comú. Tenint en compte que $|OP| = d$ i $|OP'| = r^2/d$, tenim que $|OA|/d = r^2/d|OA'|$, d'on $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Remarquem que si $A, B \in S$ (figura 26.b), llavors la recta AB i la circumferència OAB són figures inverses respecte de S, ja que la inversa de la recta AB és

una circumferència que passa per O i pels punts dobles A i B.
Anem a veure ara que la inversa C' d'una circumferència C que no passa pel centre d'inversió O és una circumferència. De fet, veurem que si P i Q són els extrems del diàmetre de C que passa per O, llavors C' és la circumferència de diàmetre $P'Q'$ (figura 27), on P' i Q' són els inversos de P i Q respecte de S.

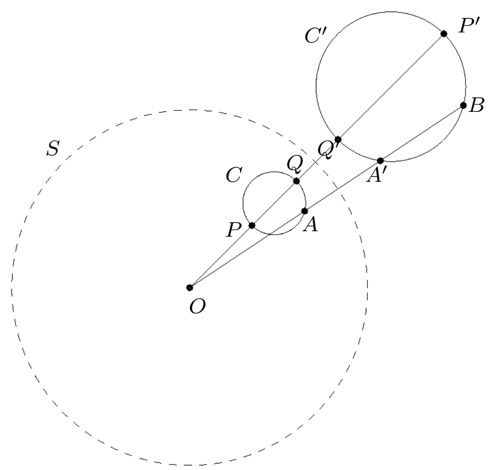


Figura 27: *Inversa d'una circumferència C que no passa per O*

En efecte, sigui C' la circumferència que acabem de definir. De $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$ obtenim $|OP'|/|OQ| = |OQ'|/|OP|$, valor que coincideix amb el mòdul k de l'homotècia de centre O que transforma C en C'. Sigui ara A un punt de C i determinem B i A' sobre C' com a la figura 27. Llavors $|OB| = k|OA|$ i $|OA'| \cdot |OB| = |OQ'| \cdot |OP'|$ (potència de O respecte de C'). Per tant,

$$|OA| \cdot |OA'| = \tfrac{1}{k}|OB| \cdot |OA'| = \tfrac{1}{k}|OQ'| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

i això acaba la prova.
Notem que la raó, k, de l'homotècia de centre O que transforma C en C' és igual a r^2/p, on p és la potència de O respecte de C:

$$k = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP| \cdot |OP'|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{r^2}{p}.$$

E. 26 .- La recta PQ que uneix dos punts P i Q d'una circumferència C que no passa pel centre O d'una circumferència S i la recta $P'Q'$ que uneix els inversos P' i Q' de P i Q respecte de S, o bé es tallen sobre l'eix radical de C i C', o bé aquest eix és paral·lel a ambdues rectes (indicació: mostreu que els punts P, Q, P' i Q' estan sobre una circumferència K, amb la qual cosa el punt d'intersecció de PQ i $P'Q'$ –si es tallen– és el centre radical de C, C' i K).

E. 27 .- Amb les notacions del problema anterior, mostreu que la recta tangent a C en un punt P i la recta tangent a C' en el punt P' formen angles iguals amb la recta PP'. A més a més, o bé es tallen sobre l'eix radical de C i C', o bé aquest és paral·lel a ambdues.

E. 28 .- Amb les notacions de la figura 26.a, mostreu que $\widehat{OA'P'}$ és igual a l'angle agut que OA forma amb la tangent a C pel punt A (indicació: aquest darrer angle coincideix amb l'angle agut que forma la tangent a C en el punt O amb OA).

Conservació dels angles. Els exercicis anteriors es poden usar per demostrar que les inversions conserven els angles. Per precisar més, un *arc* serà un segment (que pot ser una semirecta) o un arc de circumferència. Si dos arcs tenen el mateix origen, convindrem a mesurar l'angle que formen com el de les semirectes tangents als arcs en el vèrtex de l'angle. Com que les inversions transformen arcs en arcs, també transformen angles en angles i la propietat a què ens hem referit és que la mesura d'un angle coincideix amb la del seu transformat per una inversió. La demostració d'aquest fet es pot deixar com a exercici per al lector. Convé adonar-se, però, que el sentit del transformat d'un angle per una inversió és el contrari del de l'angle abans de transformar.

3 Problemes

Resoldre un problema, especialment un problema de geometria, és trobar un camí entre el que ens donen i el que ens demanen. Del que ens donen podem intentar *progressar* fent deduccions successives aplicant coneixements ja coneguts: és el procés de *síntesi* en el sentit dels antics grecs, i que en alguns diccionaris apareix reflectit com una de les accepcions del mot. Fixem-nos que els coneixements pertinents per avançar sovint esdevenen clars quan parem esment en les coses que ens donen.
A l'altra banda, allà on volem arribar, sovint és útil preguntar-se quina *mena de cosa* ens demanen, ja que les respostes a aquesta pregunta solen donar *claus* inequívoques sobre quins coneixements convé invocar per aconseguir-ho: és el procés d'*anàlisi* dels antics grecs.
Aquests principis, i d'altres, els podeu trobar il·lustrats a la mostra de solucions, presentades en forma dialogada, a la secció 0.
Un advertiment: l'ordre en el qual donem els problemes no pressuposa cap graduació progressiva de la seva dificultat.

GE 1 .- Amb les notacions de la figura 28, calculeu l'àrea del quadrat interior en funció de t.

GE 2 .- Donada una corda a d'una circumferència C de radi 1 i centre O, considereu la circumferència C' determinada imposant que a en sigui un diàmetre. Si P és el punt de C' més allunyat de O, quin és el valor màxim de la distància PO?

GE 3 .- L'angle $\widehat{A}$ d'un triangle isòsceles ABC és igual a $2/5$ d'un angle recte i $\widehat{B} = \widehat{C}$. La bisectriu de l'angle $\widehat{C}$ talla el costat oposat en el punt D. Calculeu les valors dels angles del triangle BCD. Expresseu la longitud, a, del costat BC en funció de la longitud, b, del costat AC.

GE 4 .- Sigui ABC un triangle isòsceles amb $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^o$. Siguin $D \in (A, B)$ i $E \in (A, C)$ els punts tals que $\widehat{BCD} = 50^o$ i $\widehat{CBE} = 60^o$. Quants graus té l'angle $\widehat{BED}$?

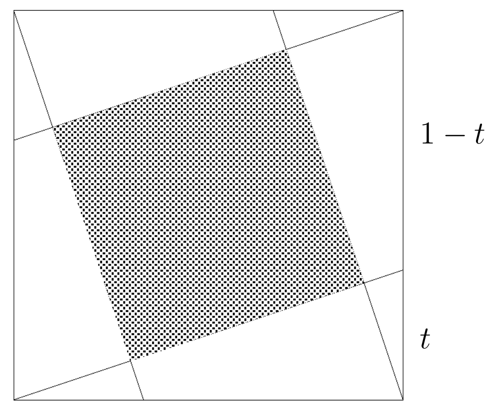


Figura 28: *Es demana l'àrea del quadrat gris en funció de t*

GE 5 (Construcció de Descartes de segments auris)**.-** A la figura 29, la circumferència és tangent a AB al punt B i el seu diàmetre és igual a AB. Demostreu que AB és el segment auri de AD i que AC és el segment auri de AB.

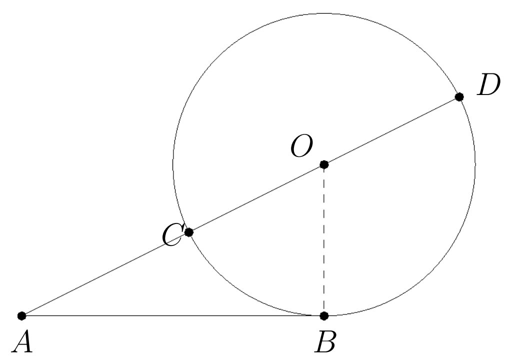


Figura 29: *Una construcció geomètrica de segments auris*

GE 6 .- Proveu que en un pentàgon regular el costat és segment auri de la diagonal.

GE 7 .- Donat un punt P interior a un triangle ABC, siguin X, Y i Z els peus de les perpendiculars des de P als costats BC, CA i AB, respectivament (es diu que XYZ és el *triangle pedal* del punt P relatiu al triangle ABC). Proveu que

$$YZ = \frac{a}{2\rho}PA, \quad ZX = \frac{b}{2\rho}PB, \quad XY = \frac{c}{2\rho}PC,$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

GE 8 .- En un triangle acutangle ABC, la bisectriu interior de l'angle $\widehat{A}$ talla el costat BC en el punt K i el cercle circumscrit en el punt M. Siguin L i N els peus de les perpendiculars per K a AB i AC, respectivament. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.

GE 9 .- En cada un dels vèrtexs d'un quadrat, el costat del qual fa un quilòmetre, hi ha una casa, i les quatre cases volen fer camins amb els que es puguin comunicar les unes amb les altres. Què poden fer, si només disposen de materials per construir $1+\sqrt{3}$ km de camí?

GE 10 .- Proveu que els tres angles d'un triangle ABC són aguts si i només si existeixen punts A', B' i C' de l'interior dels costats BC, AC i AB, respectivament, tals que els segments AA', BB' i CC' tenen la mateixa longitud.

GE 11 .- Demostreu que qualsevol polígon convex d'àrea 1 està contingut en un rectangle d'àrea no superior a 2.

GE 12 (Teorema de Morley)**.-** Donat un triangle ABC, construïm el triangle PQR tal com indica la figura 30. Demostreu que

$$|QR| = 8\rho\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma),$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscrita a ABC. Notem que la simetria de la relació obtinguda mostra que el triangle PQR és equilàter, fet que és conegut com a *teorema de Morley*.

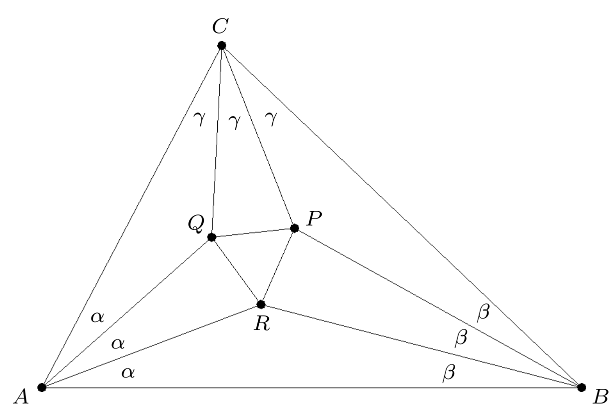


Figura 30: *Teorema de Morley: PQR és equilàter*

GE 13 .- Sigui ABC un triangle i P un punt tal que $PA=7$, $PB=5$ i $PC=3$. Demostreu que si ABC té, amb aquestes condicions, perímetre màxim, llavors P és l'incentre de ABC.

GE 14 .- Siguin P, Q, R i S els centres dels quadrats construïts externament sobre els quatre costats d'un rombe. Demostreu que $PQRS$ és un quadrat. Si fixem el centre, el costat i l'orientació del rombe, i deixem que l'angle entre dos costats contigus variï, quin lloc geomètric descriu el punt P?

GE 15 .- Proveu que un quadrilàter convex és circumscriptible a una circumferència si i només si les sumes dels dos parells de costats oposats són iguals.

GE 16 .- Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.

GE 17 .- Sigui $2p$ el perímetre d'un triangle i μ la suma de les seves tres mitjanes. Demostreu que

$$\frac{3p}{2} < \mu < 2p \ .$$

GE 18 .- Demostreu que un quadrilàter convex és inscriptible en una circumferència (és a dir, que existeix una circumferència que passa pels seus vèrtexs) si i només si té dos angles oposats suplementaris.

GE 19 .- Proveu que les altures d'un triangle són les bisectrius del seu triangle òrtic (vegeu la figura 5). Resulta, així, que l'ortocentre d'un triangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.

GE 20 (Cercle d'Euler)**.-** Demostreu que els punts mitjans dels costats d'un triangle (figura 31) i els peus de les seves altures estan sobre un cercle.

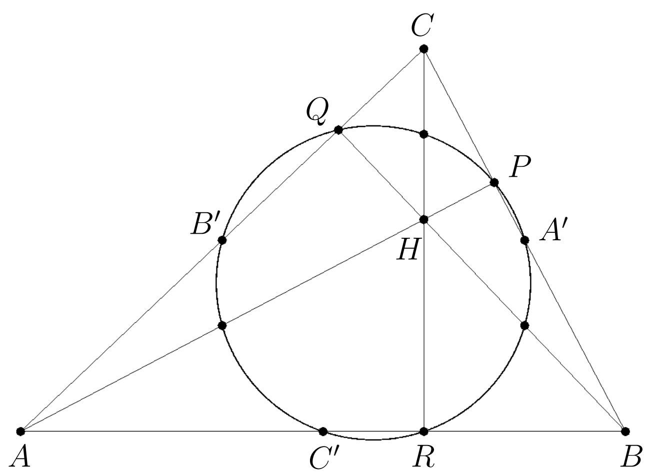


Figura 31: *Cercle d'Euler, o dels nou punts*

GE 21 .- El cercle d'Euler d'un triangle també passa pels punts mitjans dels segments que uneixen els vèrtexs d'un triangle amb l'ortocentre (per aquesta raó el cercle d'Euler s'anomena també *cercle dels nou punts* del triangle; figura 31).

GE 22 .- Sigui P un punt, ABC un triangle i X, Y, Z els peus de les perpendiculars per P als costats BC, CA i AB, respectivament. Demostreu que X, Y i Z estan alineats si i només si P està sobre la circumferència circumscrita de ABC (en aquest cas, la recta que conté els punts X, Y i Z s'anomena *recta de Simson* de P relativa al triangle ABC; vegeu la figura 32).

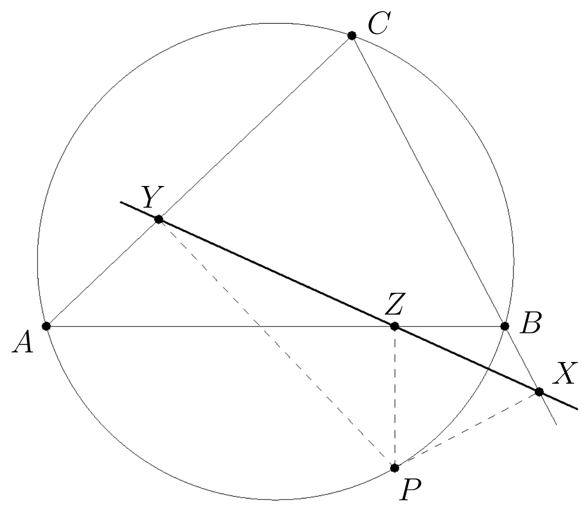


Figura 32: *Recta de Simson*

GE 23 (Problema de Fagnano)**.-** Demostreu que el mínim perímetre d'un triangle inscrit en un triangle acutangle donat és el del triangle òrtic (vegeu la figura 5).

GE 24 .- Trobeu el punt interior d'un triangle acutangle tal que la suma de les seves distàncies als vèrtexs sigui mínima (*punt de Fermat* del triangle).

GE 25 .- Demostreu que les circumferències circumscrites dels triangles equilàters construïts sobre els tres costats d'un triangle, al seu exterior, passen pel punt de Fermat. A més a més, els centres d'aquests tres triangles formen un altre triangle equilàter.

GE 26 (Teorema de Ptolemeu)**.-** En un quadrilàter convex la suma dels productes de les dues parelles de costats oposats és no inferior al producte de les dues diagonals, i la igualtat val si i només si el quadrilàter és inscriptible.

GE 27 .- Sigui ABC un triangle isòsceles amb BC com a costat desigual. Sigui Q el peu de l'altura pel vèrtex B i P el peu de la perpendicular a BC per Q. Trobeu l'àrea del triangle en funció de $x = BP$ i $y = PC$.

GE 28 .- En un triangle ABC escollim punts X, Y i Z sobre els costats BC, CA i AB, respectivament. Considerem les rectes per X, Y i Z que són perpendiculars a BC, CA i AB, respectivament. Proveu que les tres rectes són concurrents si i només si $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$.

GE 29 .- Sigui O el centre d'una circumferència K, AB un diàmetre, t la recta tangent a K en el punt B. Donat un punt P de K diferent de A i B, siguin C i D els punts d'intersecció amb t de la tangent a K pel punt P i de la recta AP. Proveu que $BC = CD$.

Geometria

GE 30 .- Trobeu l'àrea d'un octògon convex inscrit en una circumferència sabent que té quatre costats consecutius de longitud 2 i els altres quatre de longitud 3.

GE 31 .- Siguin P i O punts fixos. Trobeu el lloc geomètric del simètric de P respecte d'una recta variable per O.

GE 32 .- Sigui H l'ortocentre d'un triangle, P el peu d'una altura i Q el punt d'intersecció de la semirecta HP amb el cercle circumscrit. Demostreu que $HP = PQ$.

GE 33 .- Proveu que el baricentre d'un triangle ABC és el punt G del segment HO tal que $GO = \frac{1}{2}GH$ i que el punt mitjà de HO és el centre de la circumferència circumscrita en el triangle $A'B'C'$ els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats de ABC (la recta HO s'anomena *recta d'Euler* del triangle ABC; vegeu la figura 33).

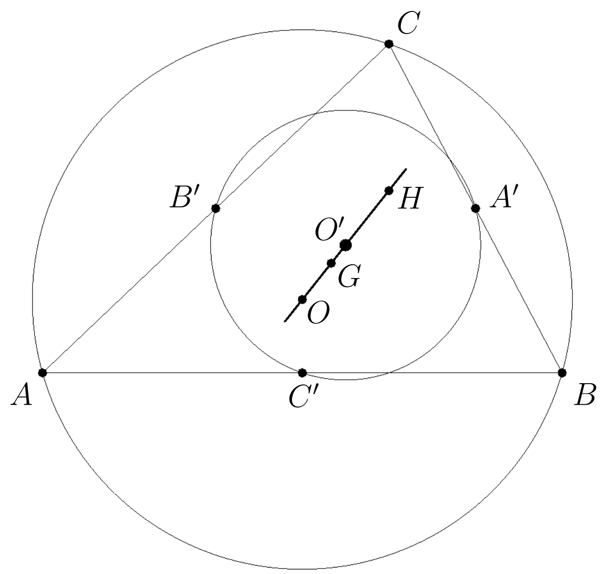


Figura 33: *Recta d'Euler*

GE 34 .- Si la recta d'Euler d'un triangle passa per un dels vèrtexs, el triangle és rectangle o isòsceles.

GE 35 .- Amb les notacions de la figura 31, sigui P' el punt de l'arc $A'P$ del cercle d'Euler tal que $\operatorname{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\operatorname{arc}(A'P)$. Definim Q' i R' de manera similar. Demostreu que llavors el triangle $P'Q'R'$ és equilàter (figura 44).

GE 36 .- Siguin A i B dos punts no diametralment oposats d'un cercle C donat i sigui XY un diàmetre variable de C. Determineu el lloc geomètric del punt d'intersecció de les rectes AX i BY.

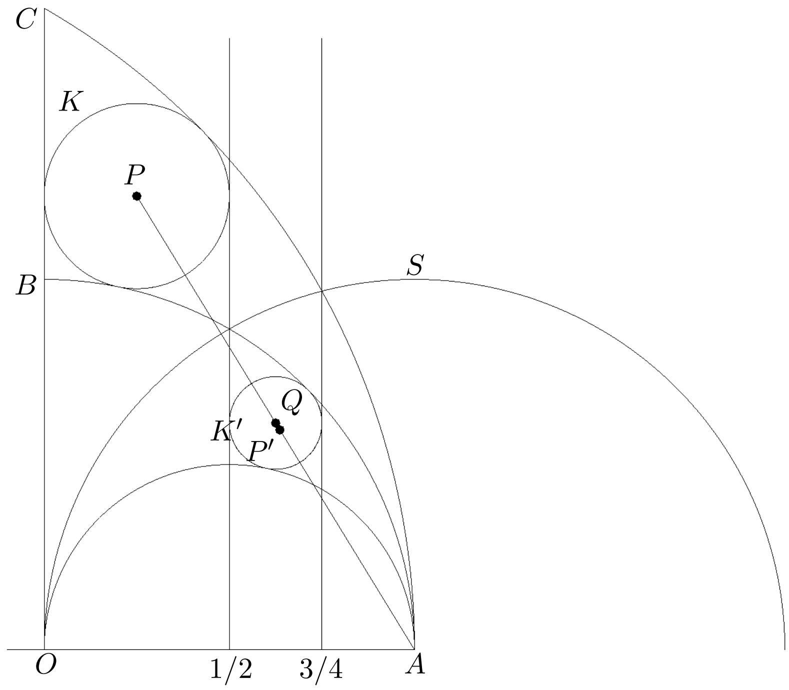


Figura 34: *Una aplicació de les inversions*

GE 37 (Erdös–Mordell)**.-** Sigui E un punt a l'interior d'un triangle ABC, s la suma de les distàncies de E als vèrtexs i t la suma de les distàncies de E als peus de les rectes per E perpendiculars als costats. Demostreu que $s \geqslant 2t$.

GE 38 .- Sigui E un punt interior d'un triangle ABC. Siguin x, y i z les distàncies de E als vèrtexs A, B i C, respectivament, i p, q i r les distàncies de E als costats BC, CA i AB, respectivament. Llavors,

$$xyz \geqslant (p+q)(p+r)(q+r).$$

GE 39 .- Siguin S i K circumferències diferents. Demostreu que K és doble per la inversió respecte de S si i només si K i S són ortogonals.

GE 40 .- A la figura 34, l'arc AB és un quadrant de la circumferència de centre O i radi $|OA| = 1$, i AC és l'arc que correspon a la circumferència de radi 2 amb centre en el punt simètric de A respecte del punt O. Comproveu que K i K' són circumferències inverses respecte de la circumferència S de centre A i radi 1. Si P' és l'invers de A respecte de K', proveu que P' i el centre P de K són inversos respecte de S. Trobeu també la posició del centre Q de K' (i noteu que Q i P' són diferents).

GE 41 .- Siguin P i A dos punts diferents donats i O un punt variable en una semirecta σ d'origen A donada. Sigui S la circumferència de centre O i radi $|OA|$ i P' l'invers de P respecte de S. Sigui L la recta perpendicular a σ pel punt A. Demostreu que el límit

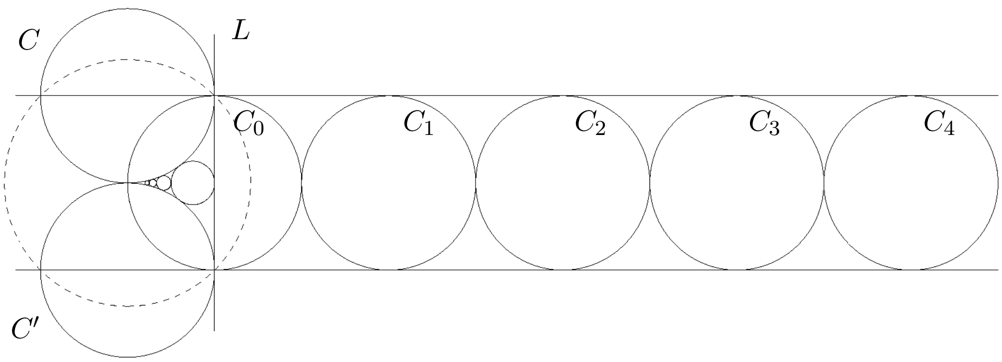


Figura 35: *Càlcul del diàmetre de les circumferències entre L, C i C'*

de P' quan O s'allunya indefinidament de A és el punt simètric de P respecte de la recta L (si mirem L com el límit de S quan O s'allunya indefinidament de A, veiem que podem considerar la simetria respecte de L com el límit de la inversió respecte de S).

GE 42 .- Sigui S una circumferència de centre O, i P i P' dos punts no pertanyents a S i diferents de O. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

1) P i P' són inversos respecte de S.
2) P i P' estan alineats amb O i existeix una circumferència K ortogonal a S que passa per P i P'.
3) Existeixen dues circumferències distintes K i K' que passen per P i P' i són ortogonals a S.

GE 43 .- Sigui S una circumferència de centre O, L una recta que no passa per O i $C = L'$ la circumferència inversa de L respecte de S. Demostreu que si P i Q són punts simètrics respecte de L, llavors els inversos P' i Q' de P i Q respecte de S són inversos respecte de C (és a dir, la simetria respecte de L i la inversió respecte de C es corresponen per la inversió respecte de S).

GE 44 .- Considerem la figura 35, en la qual C i C' són dues circumferències tangents del mateix radi R. La recta L és una tangent comuna a C i C' i les circumferències C'_n ($n \geqslant 1$) es determinen de manera que estiguin contingudes a la regió entre L, C i C' i que C'_n sigui tangent a C'_{n-1}, C i C' (convenim que $C'_0 = L$). Comproveu que C'_n és la inversa de C_n respecte de la circumferència puntejada i useu aquest fet per demostrar que el diàmetre de C'_n és igual a $R/n(n+1)$ (la circumferència puntejada és la que passa pels punts de contacte de L amb C i C' i que té per centre el punt de contacte de C i C').

GE 45 .- A la figura 36, la circumferència C' és interior, i tangent en el punt B, a la circumferència C i les circumferències $C_0, C_1, \ldots$ es construeixen tal com indica la figura.

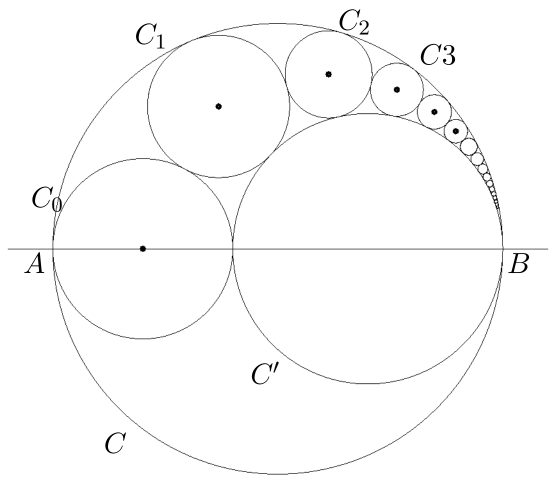


Figura 36: *Quin diàmetre té C_n?*

Proveu que el diàmetre de C_n ($n \geqslant 1$) és igual a y_n/n, on y_n és la distància del centre de C_n a la recta AB (indicació: trobeu les inverses de $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n$ respecte de la circumferència de centre B que és ortogonal a C_n).

4 La Raquel i en Pau resolen problemes

En aquesta secció donem les solucions, en forma dialogada, de cinc problemes de la llista (GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35). Ens hem decidit a emprar aquest mitjà perquè ens ha semblat adient per intentar explicar, a més a més de la solució, algunes idees i processos que ens semblen rellevants per a la resolució de problemes de geometria. Les solucions convencionals dels mateixos problemes, que són les que, en definitiva, s'exigeixen, les podeu trobar a la secció 0.

Als diàlegs, en Pau i la Raquel són estudiants dedicats a la tasca d'aprendre a resoldre problemes de geometria. A l'aula de ciència-ficció on treballen, l'Ariadna, una terminal de darreríssima generació, segueix atentament els seus passos. Ocasionalment, quan ho creu oportú, fa que l'Euclides, un dels seus mòduls més avançats, ajudi els estudiants a retrobar el fil de les seves disquisicions. Per a aprofitar de manera òptima les cavil·lacions de l'Euclides, convé remarcar que té dos modes de funcionament. Un, que podem qualificar de *declaratiu*, imita el procés de "síntesi" dels antics grecs, és a dir, enuncia conclusions que s'obtenen directament de les proposicions generades fins al moment mitjançant coneixements establerts (i generalment coneguts). L'altre, que podem qualificar d'*interrogatiu*, imita el procés d'"anàlisi" en el sentit dels antics, és a dir, fa *preguntes clau* amb les quals usualment es redueixen a un curt nombre els coneixements que cal posar en joc per intentar aconseguir l'objectiu del problema. Com veurem, els estudiants aprenen ràpidament les tècniques de resolució de problemes, i progressivament l'ajut que necessiten de l'Euclides es fa més esporàdic i considerablement més sofisticat.

Geometria

Problema GE6

Després de llegir l'enunciat, en Pau i la Raquel dibuixen la figura 37. Recorden molt bé que a l'inici de les classes el professor els va dir que, quan es tracta de resoldre problemes de geometria, un dibuix pot ésser decisiu. Amb tot això, però, és el primer problema, estan una mica cohibits i no saben ben bé com començar. Veient la situació, l'Ariadna sol·licita a l'Euclides que els ajudi.

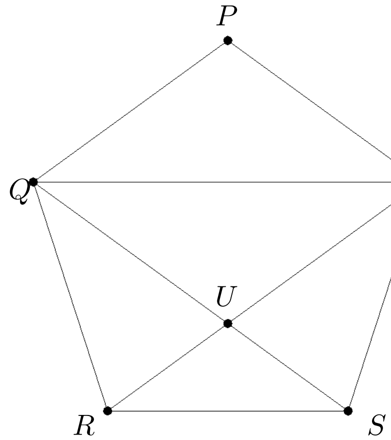


Figura 37: *El pentàgon i la raó àuria*

Euclides: El quadrilàter $PQUT$ és un paral·lelogram.

Raquel: Té raó, la diagonal QS és paral·lela al costat PT i la diagonal TR és paral·lela al costat PQ.

Euclides: El quadrilàter $PQUT$ és un rombe.

Pau: És clar, $PT = PQ$ perquè el pentàgon és regular.

Euclides: Així $QU = PT$.

Raquel: Obvi.

Euclides: Per tant, $QS - PT = QS - QU = US$.

P. i R.: Evident.

Euclides: Els triangles QTU i RUS són semblants.

Raquel: Ja ho veig, podem aplicar el criteri AAA de semblança.

Pau: El que diu que dos triangles són semblants quan tenen els tres angles iguals?

Raquel: Sí, si no ho recordo malament.

L'Euclides ha aprofitat aquests instants per acabar la seva tasca i descarrega dues línies de símbols:

Euclides: Per tant $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$. I com que $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$, pel que ja hem vist, obtenim que $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$.

Passen els moments i L'Euclides ja no diu res més.

R. i P.: I...?

Euclides: Què volíeu demostrar?

Pau: Que el costat del pentàgon regular és segment auri de la diagonal.

Euclides: I això què vol dir?

Raquel: Segons la definició, que si a és la diagonal i x el costat, llavors $a/x = x/(a-x)$.

Euclides: I fins on hem arribat en mode directe?

L'Euclides diu "mode directe" al que nosaltres n'hem dit "declaratiu", i diu "mode invers" al que n'hem dit "interrogatiu", això és, el que ha emprat després de "I...?"

Pau: Fins a la relació $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$.

R. i P.: Ah, ja ho veiem! Efectivament s'ha establert que el costat PT és segment auri de la diagonal QS, i això acaba la prova!

Problema GE16

Ariadna també sol·licita l'ajuda de l'Euclides, que comença en mode interrogatiu.

Euclides: Quina mena de coses us demanen?

Pau: No entenc què vol dir.

Raquel: Jo crec que ho sé: hem de demostrar que es compleixen unes certes desigualtats.

Euclides: Magnífic. Desigualtats..., entre què?

Pau: Entre distàncies.

Euclides: Excel·lent. I de què disposeu per demostrar desigualtats entre distàncies?

Pau: Jo només conec la desigualtat triangular.

Euclides: Pots enunciar-la?

Pau: Sí: en un triangle, tot costat és inferior a la suma dels altres dos.

Euclides: I com podríem intentar aplicar-la a les desigualtats que ens demanen?

En Pau i la Raquel pensen un moment. No saben ben bé què dir. L'Euclides hi intervé, en mode declaratiu, per facilitar-los la tasca.

Euclides: El problema demana dues desigualtats; en realitat estem en presència de dos problemes.

Raquel: Hauríem de fer un dibuix.

Amb un no res dibuixen la figura 38.a.

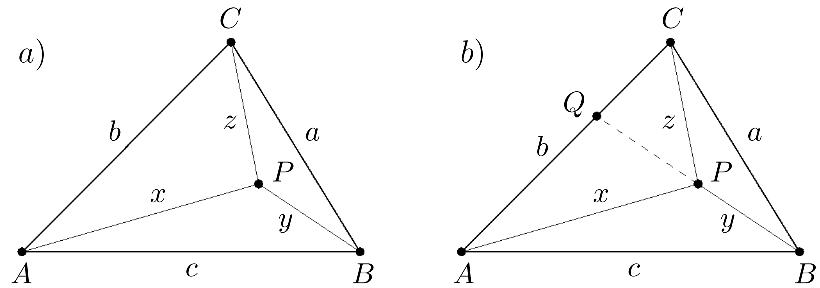


Figura 38: *Figures usades per resoldre el problema 16*

Raquel: Si posem $2p$ per denotar el perímetre de ABC, hem de veure, d'una banda, que $p < x + y + z$, i, de l'altra, que $x + y + z < 2p$.

Euclides: Us faré una pregunta més explícita que l'anterior: com podeu usar la desigualtat triangular per establir $p < x + y + z$?

Pau: Hauríem de cercar triangles, a la figura 38.a, en els que un costat estés relacionat amb el perímetre i els altres dos amb els segments x, y i z.

Raquel: Els triangles PAB, PBC i PCA, per exemple?

Pau: Sí, per exemple. La desigualtat triangular, aplicada a PAB, ens dóna $c < x + y$.

Raquel: I aplicada als altres dos ens dóna, anàlogament, $a < y + z$ i $b < z + x$.

Pau: Sumant les tres desigualtats tenim $a + b + c < 2x + 2y + 2z$.

Raquel: I com que $a + b + c = 2p$, en resulta que $p < x + y + z$, com volíem demostrar.

Euclides: Heu demostrat una part del problema 16.

Pau: L'atra part era la desigualtat $x + y + z < 2p$.

Raquel: Si intentem de prosseguir l'anàlisi de l'Euclides, ara ens hauríem de preguntar com podem usar la desigualtat triangular per establir $x + y + z < 2p$.

Pau: Com en el cas anterior, hauríem de cercar triangles en els quals, a la inversa d'abans, un costat estigui relacionat amb els segments x, y i z, i els altres dos, amb el perímetre.

Miren la figura 38.a *i no aconsegueixen veure cap triangle que compleixi el que volen. Per un moment no saben què fer. Tot d'una, però, la Raquel té un idea; li sembla bona i això l'empeny a explicar les seves conseqüències sense pausa:*

Raquel: No ens cal la desigualtat triangular: és evident que $x + y < b + a$; anàlogament, $y + z < c + b$ i $z + x < a + c$; sumant, $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$, és a dir, $x + y + z < 2p$. I ja està, hem acabat!

Pau: Això ha estat brillant, Raquel. Però... com veus que $x + y < a + b$?

Raquel: Hum!

Pau: Com que és una desigualtat entre distàncies, potser el que hem d'intentar és provar-la aplicant de nou la desigualtat triangular.

Raquel: Tens raó; ja ens hem convençut que és l'única eina que coneixem per intentar resoldre aquesta mena de qüestions.

En Pau completa la figura 38.*a fins a obtenir la figura* 38.*b*.

Pau: Crec que ja ho tenim. Fixa-t'hi: $x < AQ + QP$, per la desigulatat triangular; per tant $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB$; ara $QB < QC + CB$, altra cop per la desigualtat triangular, d'on $AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$. Per tant, $x + y < b + a$.

Raquel: Efectivament. I així sí que la demostració és completa!

Problema GE17

Abans de passar a intentar resoldre el problema 17, *en Pau i la Raquel llegeixen el seu enunciat amb molta cura i dibuixen la figura* 39.*a*.

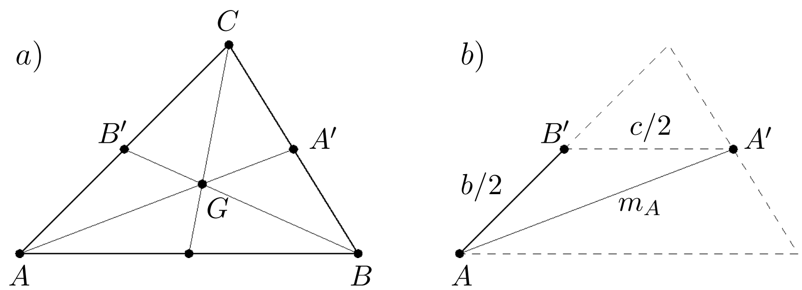


Figura 39: *Figures usades per resoldre el problema 17*

Pau: Em pregunto si el problema anterior, aplicat al baricentre G, ens donaria alguna cosa.

Raquel: Podem provar-ho. Només ens caldria saber el valor de $x+y+z$ [amb les notations del problema anterior i amb $P = G$] en termes de μ [la suma de les tres mitjanes].

Pau: Això és fàcil. Sabem que $AG = \frac{2}{3}AA'$, on A' és el punt mitjà de BC. En altres paraules, $x = \frac{2}{3}m_A$, on m_A és la mitjana corresponent al vèrtex A. Per tant $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$.

Raquel: I com que $p < x + y + z$ (pel problema 16), resulta que $p < \frac{2}{3}\mu$.

Pau: Que és equivalent a $\frac{3}{2}p < \mu$, la primera de les relacions que volem demostrar. Què passarà amb la segona?

Raquel: Si apliquem la segona desigualtat del problema anterior, obtenim $\frac{2}{3}\mu < 2p$.

Pau: Però el que volem és $\mu < 2p$. I $\mu < 2p$ és més forta que $\frac{2}{3}\mu < 2p$.

Raquel: Perquè $\frac{2}{3}\mu < \mu$, oi? Què hi farem! Haurem d'investigar una altra via.

Pau: Podem intentar aplicar la desigualtat triangular una altra vegada.

Raquel: Bona idea! Pel que hem après fins ara, ens cal trobar triangles amb un costat relacionat amb μ, i els altres dos, amb el perímetre.

Pensen una mica. Al final dibuixen la figura 39.*b*.

Pau: Com que $A'B' = c/2$, el triangle $AA'B'$ té un costat, AA', que és la mitjana m_A, mentre que els altres dos costats són iguals a $c/2$ i $b/2$.

Raquel: *Ergo*, $m_A < c/2 + b/2$. Anàlogament tenim $m_B < a/2 + c/2$ i $m_C < b/2 + a/2$.

Pau: I sumant, $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$.

La Raquel i en Pau es disposen a celebrar l'èxit. Encara no han tingut temps de començar, quan l'Euclides pregunta:

Euclides: Creieu que les desigualtats obtingudes son òptimes?

L'interès amb què reben aquesta qüestió no els priva de prendre's un descans.

Consignem aquí només que quan van tornar a la qüestió es van adonar de les coses següents. Al problema 16, si fem $P = C$, llavors $x + y + z = a + b + 0$. Per tant, si fem que c sigui cada vegada més petit, llavors $2p = a + b + c$ tendeix a $a + b = x + y + z$, i per tant la desigualtat $x + y + z < 2p$ no es pot millorar. Per altra banda, si fem $P = A$ i fem tendir c a 0, llavors $x + y + z = 0 + a + c$ tendeix a a i $p = (a + b + c)/2$ tendeix a $(2a)/2 = a$, amb la qual cosa es veu que la desigualtat $p < x + y + z$ tampoc no es pot millorar. Pel que fa al problema 17, es van adonar, considerant un triangle amb c cada vegada més petit, que la desigualtat $\mu < 2p$ no es pot millorar, i considerant un triangle en el que C tendeix al punt mitjà de AB, que tampoc no es pot millorar la desigualtat $\frac{3}{2}p < \mu$.

Problema GE23

Euclides: Què ens demanen?

Raquel: Demostrar que el triangle òrtic d'un triangle donat és el que té el perímetre més petit entre tots els triangles inscrits al primer.

Pau: És a dir, es tracta de veure que una certa longitud és mínima entre les que satisfan unes certes condicions.

Euclides: Quins enunciats coneixeu que permetin concloure que una longitud és mínima?

Raquel: Jo només conec que entre totes les corbes que uneixen dos punts, la recta és la que té longitud menor.

Euclides: Podríem usar aquest coneixement per determinar si un triangle inscrit té perímetre mínim?

Pau: No ho veig pas fàcil, ja que el triangle és una línia tancada.

Fan una pausa per dibuixar la figura 40.*a*.

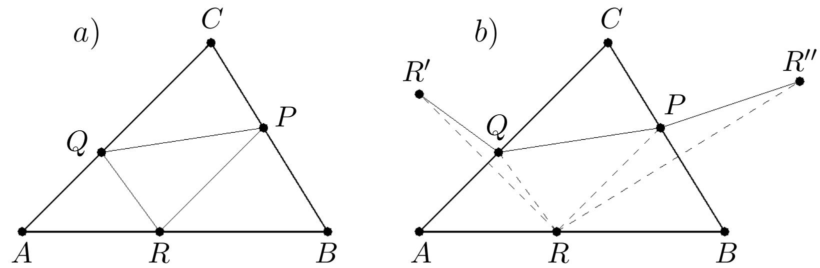


Figura 40: *Resolució del problema de Fagnano*

Raquel: Potser podríem obrir-lo [el triangle PQR]; obrir-lo d'alguna manera que ens fos útil.

Pau: Genial! Potser una manera d'aconseguir-ho sigui canviar els costats QR i PR pels seus simètrics QR' i QR'' respecte dels costats AC i BC.

Raquel: Vegem quin aspecte tindria fent una figura.

Dibuixen la figura 40.*b.*

Raquel: La línia $R'QPR''$ té, doncs, la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit PQR.

Pau: Sí, és clar; per les propietats de les simetries sabem que $R'Q = RQ$ i $R''P = RP$.

Raquel: A més a més, R' i R'' no depenen en absolut de P i Q; només depenen de la posició de R.

Pau: Ja veig com usar la propietat de la línia recta!

En Pau dibuixa la figura 41.*a, mentre explica:*

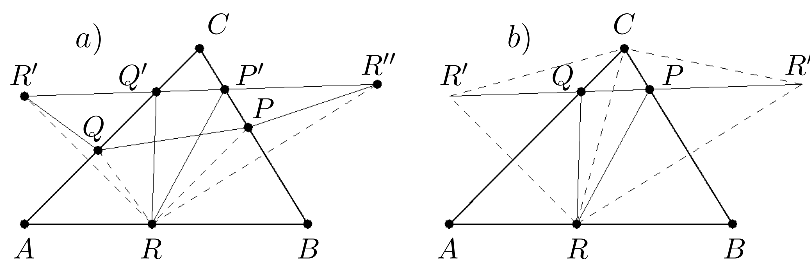


Figura 41: *Resolució del problema de Fagnano (continuació)*

Pau: Si considerem el segment $R'R''$, i aquest talla els segments AC i BC en els punts Q' i P', llavors $R'R''$ és el perímetre del triangle $P'Q'R$. I com que $R'R''$ és més curt que $R'QPR''$ (o igual, si per casualitat fos $Q' = Q$ i $P' = P$), el triangle $P'Q'R$ té el perímetre més petit (o igual) que PQR. De fet, és el de perímetre més petit sempre que mantinguem R fix.

Raquel: Ara hauríem de veure, doncs, per quin punt R el segment $R'R''$ té longitud mínima, ja que llavors el triangle $P'Q'R$ serà la solució del problema.

En Pau i la Raquel romanen en silenci. No veuen què poden fer. Han arribat fins aquí ajudats per l'Euclides en mode invers. Perquè puguin seguir, l'Euclides canvia súbitament a mode directe.

Euclides: El triangle $CR'R''$ és isòsceles.

Raquel: Per què?

Euclides: $CR' = CR = CR''$ per les propietats de la simetries.

Per poder seguir, dibuixen la figura 41.b. Decideixen oblidar-se dels punts P i Q del triangle inscrit inicial i usar les lletres P i Q per designar els punts que abans eren P' i Q'.

Pau: De fet, doncs, $CR'R$ i CRR'' també són isòsceles.

Raquel: A més, CA i CB són les altures dels dos darrers triangles respecte del vèrtex C.

Pau: En resulta que l'angle $\widehat{R'CR''}$ és el doble de l'angle $\widehat{ACB}$. Com que aquest darrer és fix, $\widehat{R'CR''}$ també és fix; vull dir que no depèn de R.

Raquel: Tenim un triangle isòsceles, $R'CR''$, volem minimitzar la seva base $R'R''$, i sabem que l'angle oposat a la base és constant.

Pau: Sota aquestes condicions, la base serà mínima quan els costats (que són iguals) siguin mínims.

Raquel: Com que els costats són iguals a CR, la base $R'R''$ serà mínima quan el segment CR ho sigui.

Pau: Fantàstic! CR és mínim quan R és el peu de l'altura respecte del vèrtex C!

Raquel: Per tant, el triangle inscrit de perímetre mínim és tal que R és el peu de l'altura i P i Q es construeixen com ja s'ha indicat.

Pau: Com que el paper de R en les consideracions anteriors el podrien haver fet P o Q, realment P i Q també són els peus de les corresponents altures.

Raquel: De fet, hem demostrat, doncs, que el el triangle inscrit de perímetre mínim és el triangle òrtic, i que els simètrics d'un vèrtex del triangle òrtic respecte dels dos costats que no el contenen estan alineats amb els altres dos vèrtexs (del triangle òrtic).

Pau: És ben curiós!

Mentre celebren alegrament aquestes excel·lents conclusions...

Euclides: On heu usat la hipòtesi que el triangle és acutangle? És, aquesta hipòtesi, indispensable? Podríeu usar la vostra conclusió per resoldre el problema 19?

Problema GE35

La Raquel i en Pau recorden que el cercle dels nou punts és el cercle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat "d'Euler", passa pels peus P, Q, R de les altures i pels punts mitjans A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC. També recorden, pel que han vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre G, el baricentre, transforma el cercle circumscrit ABC en $A'B'C'$. Abans de decidir què fer, dibuixen la figura 42 (s'ho arrangen de manera que $\widehat{A} \geqslant \widehat{B} \geqslant \widehat{C}$). D'acord amb l'enunciat, el punt P' de l'arc $A'P$ es defineix de manera que l'arc $A'P' = \frac{1}{3}A'P$; i els punts Q' i R' es defineixen de manera similar.

Raquel: Volem veure que $P'Q'R'$ és un triangle equilàter.

Pau: Segur que aquí l'Euclides preguntaria: Com podem veure que un triangle és equilàter?

Raquel: Una manera de fer-ho és aplicar la definició: un triangle és equilàter quan els seus tres costats són iguals. També n'hi ha prou veient que els seus tres angles són iguals (necessàriament d'amplitud $\pi/3$). El que encara no veig és com aplicar algun d'aquests criteris al problema.

Pau: Atès que $P'Q'R'$ estan sobre el cercle d'Euler, potser el segon criteri aniria millor.

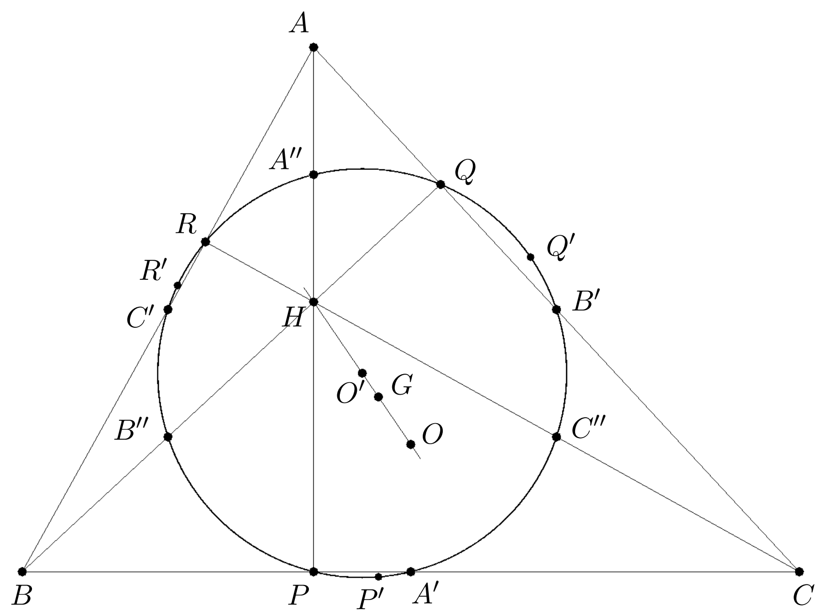


Figura 42: *Punts P', Q', R' del cercle d'Euler*

Raquel: A mi també m'ho sembla. Hauríem de veure que, en el triangle $P'Q'R'$, els angles $\widehat{P'}$, $\widehat{Q'}$ i $\widehat{P'}$ tenen amplitud $\pi/3$.

Pau: Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs $P'Q'$, $Q'R'$ i $R'P'$ sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de $2\pi/3$ radians.

Raquel: Potser no serà tan difícil com podia semblar. Sobre el cercle d'Euler hi tenim ara 12 punts i potser ens aniria bé, abans de seguir, de deduir les amplituds d'alguns dels arcs entre aquests punts.

Pau: Em sembla bé. Els arcs $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$, per exemple, són fàcils: les seves amplituds son les mateixes que les dels arcs AB, BC i CA sobre el cercle circumscrit ABC, és a dir, iguals a $2\widehat{C}$, $2\widehat{A}$ i $2\widehat{B}$.

Raquel: Suposo que la primera afirmació que fas prové de l'homotècia que transforma ABC en $A'B'C'$, i que la segona surt directament del que sabem d'angles inscrits.

Pau: Efectivament.

$$A'B' = 2\widehat{C}, \quad B'C' = 2\widehat{A}, \quad C'A' = 2\widehat{B}.$$

Ara ja no en veig cap més.

Raquel: Jo veig una relació que potser ens pot donar quelcom més. Fixa-t'hi [mentre ho diu, dibuxa la figura 43]: Com que A' és el punt mitjà de BC i C'' el punt mitjà de BH, resulta que $A'C''$ és paral·lela a l'altura BH.

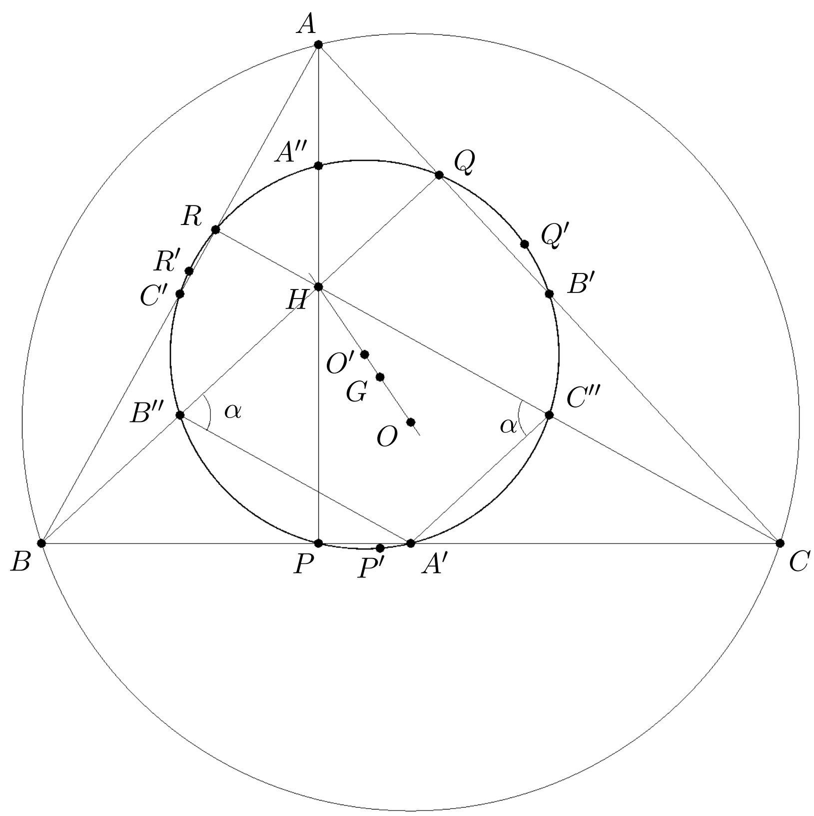


Figura 43: *Determinació d'angles centrals sobre el cercle d'Euler*

Pau: Anàlogament $A'B''$ és paral·lela a l'altura CR, etc.

Raquel: I així $A'C''HB''$ és un paral·lelogram.

Pau: I tot això què té a veure amb els angles?

La Raquel posa la lletra α a l'angle $\widehat{A'C''H}$ i a l'angle $\widehat{HB''A'}$.

Raquel: Són iguals perquè són angles oposats en un paral·lelogram.

Pau: Ja ho veig. Per angles inscrits altra vegada, 2α és igual a l'arc $A'C'R$ i també a l'arc $A'B'Q$.

Raquel: Els costats $C''A'$ i $C''H$ de l'angle $\widehat{A'C''H}$ són perpendiculars, respectivament, als costats AC i AB. Per tant, de fet, $\alpha = \widehat{A}$.

Pau: Un gran pas: ara ja tenim que l'amplitud dels arcs $A'B'Q$ i $A'C'R$ és igual a $2\widehat{A}$.

Raquel: I per diferència [$B'Q = A'Q - A'B'$ i $C'R = A'R - A'C'$] obtenim que $B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$ i $C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$. Anàlogament, serà $A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$. És a dir,

$$B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C},\ C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B},\ A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}.$$

Pau: Ara ja podem calcular l'arc $P'Q'$:

$$\begin{aligned} P'Q' &= \tfrac{1}{3}A'P + A'B' + \tfrac{1}{3}B'Q \\ &= \tfrac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \tfrac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\ &= \tfrac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \tfrac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que $Q'R' = \frac{2\pi}{3}$ i $R'P' = \frac{2\pi}{3}$, es veu de manera anàloga.

En Pau i la Raquel dibuixen la figura 44, simplement per gaudir de veure amb imatges el que han vist abans amb els ulls de la geometria. Abans de tenir temps de tancar la teminal i els quaderns, l'Euclides té temps de generar una pregunta.

Euclides: Què en podeu dir de les tres parelles d'arcs $A'C''$ i $B'C''$, PB'' i $C'B''$, QA'' i RA''?

Podem transcriure breument que la Raquel i en Pau van veure ràpidament, usant que les altures són bisectrius del triangle òrtic, que $RA'' = QA''$ i, usant el treball fet en el darrer problema, que $RA'' = QA'' = \pi - 2\widehat{A}$. Anàlogament $PB'' = RB'' = \pi - 2\widehat{B}$ i $PC'' = QC'' = \pi - 2\widehat{C}$. Això, i de nou amb els resultats del primer problema, els permet veure que $B'C'' = C'B'' = \pi - 2\widehat{A}$ i $A'C'' = PB'' = \pi - 2\widehat{B}$.

5 Mostra de solucions

En aquesta secció s'inclouen solucions convencionals dels problemes GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35. Aquestes mateixes solucions les podeu trobar exposades en forma dialogada a la secció 0, la qual cosa pot tenir interès pels lectors que vulguin reflexionar amb més deteniment sobre el procés de resolució de problemes.

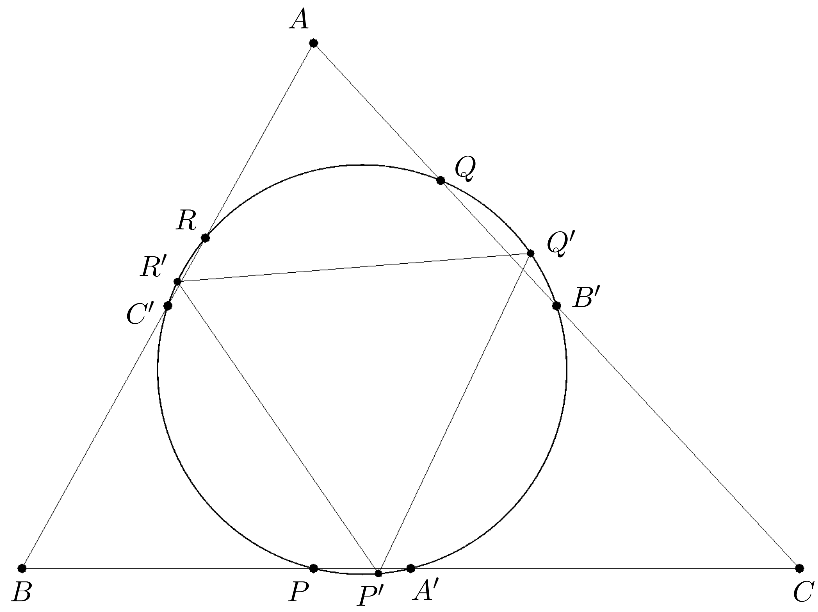


Figura 44: *El triangle equilàter $P'Q'R'$*

Problema GE6

Considerem la figura 37 (pàg. 40). El quadrilàter $PQUT$ és un rombe, ja que la diagonal QS és paral·lela al costat PT, la diagonal TR és paral·lela al costat PQ i $PT = PQ$ (perquè el pentàgon és regular). Així $QU = PT$, d'on resulta que $QS - PT = QS - QU = US$.

Per altra banda, els triangles QTU i RUS són semblants (criteri AAA de semblança). Per tant $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$. I com que $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$, pel que ja hem vist, obtenim que $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$. Per tant, el costat PT és segment auri de la diagonal QS, per la definició de segment auri.

Problema GE16

Com que ens demanen que demostrem dues desigualtats entre distàncies, intentarem aplicar la desigualtat triangular. Amb les notacions de la figura 38.a, si posem $2p$ per denotar el perímetre de ABC, hem de veure, d'una banda, que $p < x + y + z$, i, de l'altra, que $x + y + z < 2p$.

Per establir que $p < x+y+z$, fixem-nos en els triangles PAB, PBC i PCA. La desigualtat triangular, aplicada a PAB, ens dóna $c < x + y$. Anàlogament, $a < y + z$ i $b < z + x$. Sumant les tres desigualtats tenim $a + b + c < 2x + 2y + 2z$. Com que $a + b + c = 2p$, en resulta que $p < x + y + z$.

Manca veure la desigualtat $x+y+z < 2p$. Considerem la figura 38.b. Aplicant la desigualtat triangular obtenim: $x+y < AQ+QP+y = AQ+QB < AQ+QC+CB = AC+CB = b+a$. Anàlogament, $y + z < c + b$ i $z + x < a + c$; sumant, $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$, és a dir, $x + y + z < 2p$.

Problema GE17

El problema 16, aplicat al baricentre G, ens dóna la primera desigualtat. En efecte, amb les

notacions de la figura 39.a, sabem que $AG = \frac{2}{3}AA'$, on A' és el punt mitjà de BC. En altres paraules, $x = \frac{2}{3}m_A$, on m_A és la mitjana corresponent al vèrtex A. Per tant $x+y+z = \frac{2}{3}\mu$. Com que $p < x+y+z$ (pel problema 16), resulta que $p < \frac{2}{3}\mu$, que és equivalent a $\frac{3}{2}p < \mu$. Val a remarcar que si apliquem la segona desigualtat del problema 16, obtenim $\frac{2}{3}\mu < 2p$, que és una desigualtat més feble que la desigualtat $\mu < 2p$ que volem demostrar.
Per veure que $\mu < 2p$, considerem la figura 39.b. Com que $A'B' = c/2$, el triangle $AA'B'$ té un costat, AA', que és la mitjana m_A, mentre que els altres dos costats són iguals a $c/2$ i $b/2$. Per tant, $m_A < c/2 + b/2$. Anàlogament, tenim $m_B < a/2 + c/2$ i $m_C < b/2 + a/2$. Si ara sumem aquestes tres desigualtats, obtenim $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$.

Problema GE23

Considerem la figura 40.a. Volem veure que PQR té perímetre mínim si i només si PQR és el triangle òrtic de ABC. Siguin R' i R'' els simètrics del punt R respecte dels costats AC i BC, respectivament (figura 40.b). La línia $R'QPR''$ té la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit PQR. Si considerem els punts d'intersecció, Q' i P', de $R'R''$ amb els costats AC i BC, respectivament (figura 41.a), llavors el perímetre de $P'Q'R$ és igual a $R'R''$. Com que la longitud de $R'R''$ és inferior (o igual) a la longitud de la línia $R'QPR''$, veiem que el triangle $P'Q'R$ és el de perímetre més petit entre tots els triangles inscrits PQR (amb R fix). Ara ens cal veure per quin punt R del costat AB té el segment $R'R''$ longitud mínima, ja que llavors el triangle $P'Q'R$ serà la solució del problema.
Remarquem que el triangle $CR'R''$ és isòsceles ($CR' = CR = CR''$ per les propietats de la simetries; vegeu la figura 41.b). De fet, $CR'R$ i CRR'' també són isòsceles i CA i CB són són perpendiculars a RR' i RR''. En resulta que l'angle $\widehat{R'CR''}$ és el doble de l'angle $\widehat{ACB}$. Com que aquest darrer és fix, $\widehat{R'CR''}$ també és fix (és a dir, no depèn de R). Per tant la base $R'R''$ del triangle isòsceles $R'CR''$ té longitud mínima si i només si els seus costats tenen longitud mínima. Però com que els costats són iguals a CR, la base $R'R''$ serà mínima quan el segment CR ho sigui, és a dir, si i només si R és el peu de l'altura del vèrtex C. Anàlogament, es veuria que P i Q han de ser els peus de les altures de A i B, respectivament.

Problema GE35

Recordem que el cercle dels nou punts és el cercle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat *d'Euler*, passa pels peus P, Q, R de les altures i pels punts mitjans A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC. Recordem també, pel que hem vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre G (el baricentre), transforma el cercle circumscrit ABC en $A'B'C'$.
Considerem la figura 42 (suposarem que $\widehat{A} \geqslant \widehat{B} \geqslant \widehat{C}$). D'acord amb l'enunciat, el punt P' de l'arc $A'P$ es defineix de manera que l'arc $\mathrm{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\mathrm{arc}(A'P)$; i els punts Q' i R' es defineixen de manera similar. Volem veure que $P'Q'R'$ és un triangle equilàter, per la qual cosa és suficient veure que els angles $\widehat{P'}$ $\widehat{Q'}$ i $\widehat{P'}$ (del triangle $P'Q'R'$) tenen amplitud $\pi/3$. Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs $P'Q'$, $Q'R'$ i $R'P'$ sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de $2\pi/3$ radians.
Les amplituds dels arcs $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ coincideixen amb les dels arcs AB, BC i CA sobre el cercle circumscrit ABC, és a dir, són iguals a $2\widehat{C}$, $2\widehat{A}$ i $2\widehat{B}$ (per l'homotècia que transforma ABC en $A'B'C'$ i per les propietats dels angles inscrits al cercle ABC). Per

tant,

$$\mathrm{arc}(A'B') = 2\widehat{C}, \mathrm{arc}(B'C') = 2\widehat{A}, \mathrm{arc}(C'A') = 2\widehat{B}.$$

Considerem ara la figura 43. Com que A' és el punt mitjà de BC i C'' el punt mitjà de BH, resulta que $A'C''$ és paral·lela a l'altura BH. Anàlogament, $B'A''$ és paral·lela a l'altura CH i $C'B''$ és paral·lela a l'altura AH. Per tant, $A'C''HB'$ és un paral·lelogram. Així obtenim que els angles $\widehat{A'C''H}$ i $\widehat{HB'A'}$ són iguals. Però, per angles inscrits altra vegada, 2α és igual a l'arc $A'C'R$ i també a l'arc $A'B'Q$. A més a més, els costats $C''A'$ i $C''H$ de l'angle $\widehat{A'C''H}$ són perpendiculars, respectivament, als costats AC i AB. Per tant, $\alpha = \widehat{A}$. Tenim, doncs, que l'amplitud dels arcs $A'B'Q$ i $A'C'R$ és igual a $2\widehat{A}$. Per diferència $[B'Q = A'Q - A'B'$ i $C'R = A'R - A'C']$ obtenim que $B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$ i $C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$. Anàlogament serà $A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$. És a dir,

$$\mathrm{arc}(B'Q) = 2\widehat{A} - 2\widehat{C},\ \mathrm{arc}(C'R) = 2\widehat{A} - 2\widehat{B},\ \mathrm{arc}(A'P) = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}.$$

Ara ja podem calcular l'arc $P'Q'$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{arc}(P'Q') &= \tfrac{1}{3}\mathrm{arc}(A'P) + \mathrm{arc}(A'B') + \tfrac{1}{3}\mathrm{arc}(B'Q) \\
&= \tfrac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \tfrac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\
&= \tfrac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\
&= \tfrac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Que $\mathrm{arc}(Q'R') = \frac{2\pi}{3}$ i $\mathrm{arc}(R'P') = \frac{2\pi}{3}$, es veuen de manera anàloga.

Referències

Coxeter, H. S. M., *Fundamentos de Geometría*. Limusa.

Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L., *Geometry revisited*, 6a, The Mathematical Association of America, 1967.

Eves, H., *A survey of geometry*, Allyn and Bacon.

Johnson, R. A., *Advanced Eucledian Geometry*, Dover.

Larson, L. C., *Problem-solving through problems*, Springer-Verlag.

Puig Adam, P., *Curso de Geometría métrica, (Tomo I - Fundamentos). Gómez Puig Ediciones.*

FORUM de problemes 93/94, Societat Catalana de Matemàtiques, IEC.

ARITMÈTICA

Griselda Pascual i Xufré

Introducció.

En aquest capítol ens proposem aprendre a resoldre problemes d'Aritmètica. Segurament que la paraula aritmètica us sonarà a quelcom que vàreu aprendre a l'escola primària i que no n'heu sentit a parlar més al llarg dels estudis secundaris. Per això, pensar ara a aprendre a resoldre problemes d'aritmètica us semblarà un xic estrany, potser fins i tot pensareu que està fora de lloc per la seva senzillesa. Si és així, esteu ben lluny de la realitat. Hi ha problemes d'aritmètica molt difícils; tant, que alguns d'ells s'ha tardat molt temps a resoldre a pesar de treballar-hi grans matemàtics. Recentment n'hem tingut un exemple: *El Teorema de Fermat*. Aquest teorema diu: *"Si n és un nombre natural més gran que* 2*, l'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions en nombres enters."* El va enunciar Fermat cap a la meitat del segle XVII; fins l'any passat (1995) no s'ha trobat la demostració, i aquesta s'ha obtingut utilitzant mitjans de la més alta matemàtica. El Teorema de Fermat és un problema d'aritmètica perquè imposa que les solucions siguin nombres enters. Hi ha altres problemes d'aritmètica, com per exemple l'anomenada *Conjectura de Goldbach*, enunciada per aquest matemàtic l'any 1742, i que diu *"Tot nombre parell més gran que dos és suma de dos primers"*, que encara no estan resolts.

Si doneu un cop d'ull als problemes proposats, que pretenen ser una mostra dels problemes d'aritmètica que es poden presentar a aquest nivell, veureu que sempre només hi intervenen nombres enters i en algun cas racionals. Per això són problemes d'aritmètica. Han estat seleccionats de manera que els pogueu resoldre, o bé utilitzant propietats dels nombres enters que potser no les heu estudiat mai però teniu prou maduresa matemàtica per entendre-les, o bé amb recursos d'àlgebra i d'anàlisi que heu après en el batxillerat. Però si intenteu resoldre'ls, potser moltes vegades no sabreu ni per on començar.

Per això, encara que considerem prioritari revisar les propietats del nombres enters abans esmentades, en lloc de fer-ne un llistat, ens ha semblat millor escollir de forma adequada uns quants problemes que intentarem pensar conjuntament, i incloure dins la forma de resoldre'ls les definicions i proposicions que siguin necessàries. (Donem per sabudes la definició de nombres enters i llurs operacions).

Observareu que hi ha dos tipus de problemes. Uns demanen que es busquin els nombres enters que satisfacin determinades condicions. Altres que es demostri alguna propietat de determinats nombres enters. Tant per als uns com per als altres hem procurat indicar una metodologia per a la seva resolució. Però, com podreu comprovar, moltes vegades compta molt l'enginy matemàtic que cal cultivar resolent molts problemes.

També veureu que de les proposicions que intercalem en els problemes, algunes van acompanyades de les demostracions i d'altres no. S'ha posat la demostració sempre que aquesta ens podia donar un camí per arribar a la solució del problema. Les altres proposicions podeu o intentar demostrar-les o bé cercar la demostració en algun llibre.

Finalment, només voldríem aconsellar-vos que us féssiu vosaltres un petit promptuari d'aritmètica, extraient dels problemes totes les definicions i propietats que hi trobeu. Crec que us serà útil quan us proposeu de resoldre altres problemes.

Problema 1. Trobeu tots els triangles rectangles de costats enters que tenen el perímetre igual a l'àrea. (És un problema clàssic).

En principi és un problema de geometria, ja que ens cal saber propietats dels triangles rectangles. Però com que l'única cosa que hem d'utilitzar són les mesures dels costats podem enunciar el mateix problema aritmèticament. Si designem per x, y les mesures dels catets i per z la de la hipotenusa, el teorema de Pitàgores diu que $z^2 = x^2 + y^2$; el perímetre del triangle és $x + y + z$ i l'àrea $\frac{1}{2}xy$. Per tant podem enunciar el problema així:

Trobeu totes les solucions en nombres naturals (les mesures són sempre positives) del sistema d'equacions

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ x + y + z &= \frac{1}{2}xy. \end{aligned}$$

Solució. Fent us dels coneixements d'àlgebra, com que la segona equació és lineal en z, aïllarem z en aquesta equació i la substituirem a la primera. Obtindrem

$$z = \frac{1}{2}xy - (x+y)$$
$$\left(\frac{1}{2}xy - (x+y)\right)^2 = x^2 + y^2.$$

La segona equació és una equació de segon grau en dues incògnites que, després de desenvolupada i simplificada, queda de la forma:

$$x^2y^2 - 4xy(x+y) + 8xy = 0$$

o sigui

$$xy\,(xy - 4(x+y) + 8) = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són $x = 0, y = 0$, i els valors que són solució de l'equació $xy - 4(x+y) + 8 = 0$.
En aquest moment entra l'aritmètica. Quins valors naturals de x, y satisfan aquesta equació? Per trobar-los només necessitem un xic d'enginy. Observem que si en el numerador en lloc d'un 8 hi hagués un 16 les coses serien molt senzilles. Doncs bé, fem entrar el 16 escrivint:

$$x = \frac{4y-16}{y-4} + \frac{8}{y-4} = 4 + \frac{8}{y-4}.$$

D'aquí resulta que x serà natural si i només si $y-4$ divideix 8. Com que els divisors de 8 són 8, 4, 2, 1 haurà de ser $y - 4 = 8, 4, 2, 1$ i per tant les solucions són

$$y = 12, x = 5; \quad y = 8, x = 6; \quad y = 6, x = 8; \quad y = 5, x = 12.$$

Els únics triangles rectangles solució del problema seran el que tingui catets 12 i 5 i hipotenusa 13, i el que tingui catets 8 i 6 i hipotenusa 10.

Problema 2. El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

Aquest problema és clarament un problema d'aritmètica; només hi intervenen nombres enters. Necessitem saber què és un nombre primer, amb la qual cosa entrem a la *divisibilitat* de nombres enters. En el problema anterior ja hem utilitzat que els nombres naturals divisors de 8 són 1, 2, 4, 8 sense donar la definició de divisor. Ho fem a continuació.

Definició. Donats dos nombres enters a i b es diu que b és múltiple de a o a divisor de b si existeix un nombre enter que multiplicat per a doni b; és a dir si l'equació $ax = b$ té solució en nombres enters. S'escriu $b = \dot{a}$ o bé $a|b$.

Tot nombre natural diferent de 1 té almenys dos divisors que són ell mateix i la unitat.

Definició. Un nombre natural es diu que és primer quan només té dos divisors. Quan té més de dos divisors es diu que és compost. El nombre 1 no és ni primer ni compost; es diu que és una unitat.

El nom de primer ve suggerit pel següent teorema, que per la seva importància, s'anomena

Teorema fonamental. Tot nombre natural compost descompon de manera única (sense tenir en compte l'ordre) en producte de factors primers.

Ara ja tenim el que necessitem per resoldre el problema. Veiem que el nombre 9687600 és compost ja que acaba en dos zeros. Descomponem-lo en factors primers:

$$9687600 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 23.$$

També aquí fem servir l'enginy per agrupar adequadament els factors i trobem que

$$8687600 = 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26.$$

Problema 3. Trobeu totes les solucions enteres de l'equació

$$p(x + y) = xy$$

on p és un nombre primer.

Observem que el primer membre de l'equació és el producte d'un nombre primer per la suma dels dos nombres que hem de cercar, i el segon el producte d'aquests dos nombres. Per resoldre'l utilitzarem la següent

Propietat. Si un nombre primer divideix un producte de dos nombres enters, en divideix almenys un.

Suposem que p divideix x i posem $x = pt$ amb t un nombre enter. Substituint aquesta expressió a l'equació donada es té:

$$p(pt + y) = pty, \quad \text{d'on} \quad pt + y = ty, \quad \text{o} \quad pt = y(t - 1).$$

Com que t i $t - 1$ no tenen cap divisor en comú, o p divideix y, o $p = t - 1$ i $y = t$.
Si p divideix y és $y = pu$ amb u un nombre enter, i substituint a l'equació que havíem obtingut resulta $pt = pu(t - 1)$ d'on $t = u(t - 1)$. Si $t = 0$, com que $t - 1$ és diferent de zero ha de ser $u = 0$, i aquests valors ens proporcionen la solució $x = 0$, $y = 0$. Si $t \neq 0$ ha de ser $t - 1 \neq 0$ i $u = \dfrac{t}{t-1} = 1 + \dfrac{1}{t-1}$. Com que u ha de ser un enter diferent de zero, haurà de ser $t - 1 = 1$, és a dir $t = 2$ i $u = 2$, d'on s'obté la solució $x = 2p$, $y = 2p$.
Si $p = t - 1$ i $y = t$ s'obté la solució $y = p + 1$, $x = py = p(p + 1)$. Com que l'equació és simètrica en x, y el mateix raonament fet amb la incògnita x es pot fer amb la incògnita y amb la qual cosa obtindrem la solució $x = p + 1, y = p(p + 1)$.
Exemple. Si $p = 5$ les solucions són $x = 0, y = 0$; $x = 10, y = 10$; $x = 30, y = 6$; $x = 6, y = 30$.

Problema 4. Trobeu un nombre natural n sabent que admeti només dos divisors primers diferents, que el nombre dels seus divisors és 6 i que la suma de tots els seus divisors és 28.

Per resoldre aquest problema ens cal saber calcular el nombre de divisors d'un nombre natural n i la suma de tots els seus divisors. Per això tenim la següent

Proposició. Si n descompon en factors primers de manera que

$$n = {p_1}^{a_1} {p_2}^{a_2} \cdots {p_r}^{a_r}$$

amb p_i, $(i = 1, 2, \ldots, r)$ nombres primers diferents, s'indica per $d(n)$ el nombre de divisors de n i per $s(n)$ la suma de tots aquests divisors, i es compleix

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1); \quad s(n) = \frac{{p_1}^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{{p_2}^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{{p_r}^{a_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

Intenteu demostrar aquesta proposició.
Ja estem en condicions de resoldre el problema. Posem $n = p^a q^b$ on p i q representen els dos divisors primers diferents que divideixen n. Per les fórmules de la proposició ha de ser

$$(a + 1)(b + 1) = 6; \quad \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} = 28$$

Com que $a \geq 1$, $b \geq 1$, l'única descomposició possible de 6 vàlida és $6 = 2 \cdot 3$; per tant de la primera equació resulta $a + 1 = 2$, $b + 1 = 3$,o sigui $a = 1$, $b = 2$.
Llavors la segona equació pren la forma

$$\frac{p^2 - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 28 \quad \text{i simplificant} \quad (p + 1)(q^2 + q + 1) = 2^2.7.$$

Com que p és primer $p+1$=4 i $p = 3$, i de $q^2 + q + 1 = 7$ resulta $q = 2$. El nombre cercat és per tant $n = 2^2.3 = 12$.

Problema 5. Resoldre amb nombres naturals el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} xy = 51840 \\ \text{mcd}(x, y) = 24 \end{array}\right\} .$$

En aquest problema hi intervé el concepte de màxim comú divisor de dos nombres naturals. Recordem-ho,

> **Definició**. El màxim comú divisor de dos nombres naturals a i b és el nombre natural d que divideix a i b i que tot altre divisor de a i b el divideix. S'indica per $\text{mcd}(a, b) = d$. Si $d = 1$ és diu que els dos nombres són primers entre si o primers entre ells.

> **Proposició**. Si es divideixen dos nombres a i b pel seu màxim comú divisor, s'obtenen dos nombres primers entre ells.

Ara tenim tot el que necessitem per resoldre el problema.
Posem $x = 24t$, $y = 24u$ on t i u representen enters primers entre si. Llavors $24^2 tu = 51840$ i per tant $tu = \dfrac{51840}{576} = 90$. Només ens cal ara, descompondre 90 de totes les maneres possibles amb factors primers entre si, per obtenir totes les solucions del problema.
$90 = 45 \cdot 2 = 9 \cdot 10 = 18 \cdot 5$. Fent $t = 45$, $u = 2$ es té $x = 1080$, $y = 48$; fent $t = 9$, $u = 10$ es té $x = 216$, $y = 240$; i finalment fent $t = 18$, $u = 5$ es té $x = 432$, $y = 120$.
Permutant la x i la y s'obté una altra terna de solucions.

Per tal de determinar el màxim comú divisor de dos nombres naturals cal tenir en compte que es disposa d'un algorisme molt útil que només fa ús de la divisió entera.

Algorisme d'Euclides. Siguin a i b dos nombres naturals, $a > b$. La divisió entera de a per b ens dóna dos nombres q_1, r_1 que compleixen $a = bq_1 + r_1$, $r_1 < b$. Dividint b per r_1 tindrem $b = r_1 q_2 + r_2$ amb $r_2 < r_1$; dividint r_1 per r_2 serà $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ amb $r_3 < r_2$. Seguint aquest procés, com que els residus formen una successió de nombres naturals decreixent, s'arribarà a un residu 0. L'últim residu no nul obtingut és el màxim comú divisor de a i b. Per facilitar el càlcul s'acostumen a posar els diversos nombres que intervenen a l'algorisme en la forma següent:

	q_1	q_2	$\cdots$	q_{k+1}	q_{k+2}	q_{k+3}
a	b	r_1	$\cdots$	r_k	r_{k+1}	r_{k+2}
r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_{k+2}	0	

$$r_{k+2} = \mathrm{mcd}(a, b)$$

Problema 6. Trobeu dos nombres enters que satisfacin l'equació

$$1547x + 560y = 7.$$

Anem a veure con l'algorisme d'Euclides es pot utilitzar per resoldre aquesta equació. Comencem aplicant-lo per trobar el $\mathrm{mcd}(1547, 560)$.

	2	1	3	4	1	3
1547	560	427	133	28	21	7
427	133	28	21	7	0	

i observeu que $\mathrm{mcd}(1547, 560) = 7$. Escriviu els resultats parcials

$$7 = 28 - 1 \cdot 21$$
$$21 = 133 - 4 \cdot 28$$
$$28 = 427 - 3 \cdot 133$$
$$133 = 560 - 1 \cdot 427$$
$$427 = 1547 - 2 \cdot 560$$

i feu les successives substitucions:

$$\begin{aligned} 7 &= 28 - 1 \cdot 21 = 28 - 1 \cdot (133 - 4 \cdot 28) = 5 \cdot 28 - 1 \cdot 133 = 5 \cdot (427 - 3 \cdot 133) - 1 \cdot 133 \\ &= 5 \cdot 427 - 16 \cdot 133 = 427 - 16 \cdot (560 - 1 \cdot 427) = 21 \cdot 427 - 16 \cdot 560 \\ &= 21 \cdot (1547 - 2 \cdot 560) - 16 \cdot 560 = 21 \cdot 1547 - 58 \cdot 560. \end{aligned}$$

amb la qual cosa heu obtingut la igualtat

$$1547 \cdot 21 + 560 \cdot (-58) = 7$$

Per tant $x = 21$, $y = -58$ són dos dels nombres cercats. Aquests no són els únics ja que posant

$$x = 21 - 560t \quad y = -58 + 1547t$$

i substituint a l'equació resulta

$$1547 \cdot (21 - 560t) + 560 \cdot (-58 + 1547t) = 7.$$

Donant a t tots els valors enters obtindreu totes les solucions.

Problema 7. Resoleu el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{mcm}(x,y) = 54612 \\ xy = 983016 \end{array}\right\}$$

En aquest problema intervé el concepte de mínim comú múltiple. Recordem la

> **Definició**. El mínim comú múltiple de dos nombres naturals a i b és el nombre natural m que és múltiple de a i b i que divideix tot altre múltiple de a i b.

El problema es pot ara reduir al Problema 5 aplicant la següent

> **Propietat**. Es compleix sempre
>
> $$\mathrm{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{mcd}(a,b)} \qquad \text{o bé} \qquad \mathrm{mcd}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{mcm}(a,b)}.$$

Resulta

$$\mathrm{mcd}(x,y) = \frac{983016}{54612} = 18$$

i ja estem en les condicions del Problema 5. Seguint aquells passos obtenim les solucions

$$x = 1332, y = 738; \quad x = 1476, y = 666; \quad x = 36, y = 27306.$$

Problema 8. Els tres nombres naturals $1652_{(b}$, $2012_{(b}$, $2042_{(b}$ (escrits en base b) estan en progressió aritmètica. Determineu la base b i la raó de la progressió.

En aquest problema hi intervenen dos conceptes, el de base d'un sistema de numeració i el de progressió aritmètica. El primer resulta de la següent

> **Proposició**. Donat un nombre natural $b \geq 2$, tot nombre natural n es pot escriure de manera única de la forma
>
> $$n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r$$
>
> on els a_i, $i = 0, 1, ..., r$ són nombres naturals menors que b amb $a_r \neq 0$. El nombre expressat així es diu que està escrit en el sistema de numeració de base b.

Recordem el segon concepte del problema.

> **Definició**. Una successió de nombres a_1, a_2,..., a_i, a_{i+1},..., a_n,... forma una progressió aritmètica quan la diferència de dos termes consecutius $a_{i+1} - a_i$ és un nombre constant r que s'anomena raó de la progressió.

Sabent això la resolució del problema proposat no presenta cap dificultat.
S'ha de complir

$$(2b^3 + 4b + 2) - (2b^3 + b + 2) = (2b^3 + b + 2) - (b^3 + 6b^2 + 5b + 2)$$

que després d'operar queda de la forma

$$b^3 - 6b^2 - 7b = 0$$

Ara cal resoldre aquesta equació de tercer grau amb l'incògnita b. En aquest cas és fàcil perquè es pot treure b factor comú i resoldre

$$b(b^2 - 6b - 7) = 0$$

Una solució és $b = 0$, i les altres dues les solucions de l'equació de segon grau $b^2 - 6b - 7 = 0$ es veuen immediatament: $b = -1$, $b = 7$. D'aquestes tres solucions la única vàlida pel nostre problema és $b = 7$ ja que s'ha de complir la condició $b \geq 2$.
La raó de la progressió és $r = 3b = 21$.

Problema 9. Trobeu quin és l'exponent de 2 en la descomposició en factors primers de 29!.

Per analitzar el problema escrivim el desenvolupament de 29!.

$$29! = 1 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{\underline{4}} \cdot 5 \cdot \underline{6} \cdot 7 \cdot \underline{\underline{\underline{8}}} \cdot 9 \cdot \underline{10} \cdot 11$$

$$\cdot \underline{\underline{12}} \cdot 13 \cdot \underline{14} \cdot 15 \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{16}}}} \cdot 17 \cdot \underline{18} \cdot 19 \cdot \underline{\underline{20}}$$

$$\cdot 21 \cdot \underline{22} \cdot 23 \cdot \underline{\underline{\underline{24}}} \cdot 25 \cdot \underline{26} \cdot 27 \cdot \underline{\underline{28}} \cdot 29$$

Subratllem amb una ratlleta els múltiples de 2 i observem que d'aquests n'hi ha uns que només tenen una vegada el factor 2 i d'altres que el tenen més d'una vegada. Subratllem amb una altra ratlleta els que tenen el factor 2 dues vegades és a dir els múltiples de 4; també d'aquests n'hi ha que només el tenen dues vegades i d'altres que el tenen més de dues vegades. Subratllem amb una altra ratlleta els que el tenen més de dues vegades és a dir els múltiples de 8. També d'aquests n'hi ha que el tenen només tres vegades i d'altres que el tenen més de tres vegades és a dir els múltiples de 16 que els subratllem amb una altra ratlleta. Observem que no n'hi ha cap que tingui el factor 2 més de quatre vegades, ja que si algun el tingués cinc vegades seria múltiple de 32 i $32 > 29$. L'exponent amb què figura 2 a la descomposició de 29! és igual al total del nombre de ratlletes que hem dibuixat o sigui 14+7+3+1=25. Si recordem que la part entera d'un nombre x és el nombre enter més gran que és més petit o igual que x, que l'expressem per $[x]$, observarem que $14 = \left[\frac{29}{2}\right]$, $7 = \left[\frac{29}{2^2}\right]$, $3 = \left[\frac{29}{2^3}\right]$, $1 = \left[\frac{29}{2^4}\right]$. Per tant podem escriure que l'exponent amb que figura 2 a la descomposició amb factors primers de 29! és

$$a = \left[\frac{29}{2}\right] + \left[\frac{29}{2^2}\right] + \left[\frac{29}{2^3}\right] + \left[\frac{29}{2^4}\right].$$

El mateix raonament que hem fet amb 29! i el primer 2 és vàlid per a $n!$, n un enter qualsevol i un nombre primer p.

Per exemple, si volem calcular l'exponent a en què figura 7 en la descomposició de 1000!, com que $7^4 = 2041 > 1000$, farem

$$a = \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{7^2}\right] + \left[\frac{1000}{7^3}\right] = 142 + 20 + 2 = 164.$$

Seria vàlid el raonament si p no fos primer? Intenta amb un exemple donar la resposta.

En general podem enunciar la següent

Proposició. L'exponent a en que figura un primer p en la descomposició de $n!$ en factors primers és

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots .$$

Encara que hem posat punts suspensius aquesta suma sempre acabarà ja que $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] = 0$ si $p^k > n$.

Problema 10. Determineu les possibles bases de numeració x en les quals el nombre $532_{(x}$ és múltiple de 5.

Pel problema 8 sabem que aquest problema és equivalent a trobar tots els nombres naturals $x \geq 2$ tals que $5x^2 + 3x + 2$ és múltiple de 5.

Observem, en primer lloc, que $5x^2$ és múltiple de 5 per qualsevol valor enter de x; per tant el problema queda reduït a trobar tots els valors enters de $x \geq 2$ tals que $3x + 2$ és múltiple de 5, és a dir $3x + 2 = 5k$ on k ha de ser un nombre enter. Seguint les indicacions del problema 6, i pensant un xic, podríem resoldre en nombres enters l'equació $3x - 5k = 2$ Però podem trobar un camí més curt introduint un concepte nou que, com veurem més endavant, ens serà molt útil per resoldre molts problemes. És la noció de *congruència* de nombres enters respecte d'un nombre natural $m > 1$ que s'anomena *mòdul* de la congruència.

Comencem amb un exemple que ens servirà per resoldre el problema proposat.

Considerem el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters on hi tenim definit la suma, el producte, i divisió entera. Prenem $m = 5$ com a mòdul de la congruència. Observem que tot nombre enter o serà múltiple de 5, o en dividir-lo per 5 donarà residus 1, 2, 3, o 4. Això ens permet classificar el conjunt $\mathbb{Z}$ en cinc classes disjuntes que designarem per $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, posant a la classe $\overline{0}$ els múltiples de 5, i a les classes $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ els nombres que donin respectivament residu 1, 2, 3, 4 en dividir-los per 5. És a dir

$$\overline{0} = 5k, \quad \overline{1} = 5k + 1, \quad \overline{2} = 5k + 2, \quad \overline{3} = 5k + 3, \quad \overline{4} = 5k + 4$$

on en cada cas k pren tots els valors enters. Donem ara la següent

Definició. Dos nombres $a, b \in \mathbb{Z}$ són congrus (o congruents) segons el mòdul 5, i s'indica per $a \equiv b \pmod 5$, quan pertanyen a la mateixa classe, és a dir, quan donen el mateix residu en dividir-los per 5.

És fàcil provar que $a \equiv b \pmod 5$ si i només si $a - b$ és múltiple de 5. Per tant es pot donar la definició equivalent

Definició. Es diu que dos nombres enters a i b són congrus (o congruents) segons el mòdul 5 quan $a - b$ és múltiple de 5.

Les classes $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ s'anomenen classes de congruències mòdul 5.
Observem que el mateix que hem fet amb el 5, podem fer-ho agafant per mòdul qualsevol enter $m > 1$ i per tant donar en general la següent

Definició. Dos nombres enters a, b són congrus (o congruents) segons el mòdul m quan donen el mateix residu en dividir-los per m. S'escriu $a \equiv b \pmod m$.

O equivalentment

Definició. Dos nombres enters a, b són congrus (o congruents) segons el mòdul m quan la diferència $a - b$ és múltiple de m.

(Intentem demostrar l'equivalència d'aquestes dues definicions).

Segons el mòdul m es tenen m classes de congruència que corresponen als diferents residus 0, 1, 2, 3,...,$m - 1$ que s'obtenen en dividir un nombre enter per m.
La relació $a \equiv b \pmod m$ és una relació de congruència o abreujadament es diu que és una congruència.
Les congruències tenen les següents

Propietats.
1) Si $a \equiv b \pmod m$ i $c \equiv d \pmod m$, llavors $a + c \equiv b + d \pmod m$.
2) Si $a \equiv b \pmod m$ i c és un enter qualsevol, llavors $ca \equiv cb \pmod m$.
3) Si $a \equiv b \pmod m$ i $c \equiv d \pmod m$, llavors $ac \equiv bd \pmod m$.

4) Si $a \equiv b \pmod{m}$ i d divideix m, llavors $a \equiv b \pmod{d}$ i $a \equiv b \pmod{m/d}$.

5) Si $ca \equiv cb \pmod{m}$ i $\mathrm{mcd}(c, m) = 1$, llavors $a \equiv b \pmod{m}$.

Observeu que a la propietat 5) és necessari que $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Per exemple $10 \equiv 16 \pmod 6$ i $5 \not\equiv 8 \pmod 6$.
(Intentem demostrar aquestes propietats).
Apliquem ara les congruències a la resolució del problema proposat.
Ha de ser $5x^2 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod 5$. Com que per tot enter x és $5x^2 \equiv 0 \pmod 5$, els valors buscats seran tots els enters x més grans que 1 que satisfacin la congruència $3x + 2 \equiv 0 \pmod 5$, o sigui $3x \equiv -2 \pmod 5$. Però $-2 \equiv 3 \pmod 5$ per tant $3x \equiv 3 \pmod 5$ i simplificant $x \equiv 1 \pmod 5$.
D'aquí resulta que les bases de numeració possibles són tots els enters de la forma $x = 5k+1$ on k representa qualsevol enter positiu.

Problema 11. Trobeu tots els enters positius n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7.

Solució. Escriviu l'enunciat en la forma $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 7$ o sigui $2^n \equiv 1 \pmod 7$. Només cal veure quines potències de 2 són congrües amb 1 segons el mòdul 7. Es té:

$$2^0 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7), \quad 2^1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7), \quad 2^2 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7), \quad 2^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7).$$

A partir d'aquí, per les propietats de les congruències, els residus s'aniran repetint de 3 en 3, és a dir

$$2^4 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7), \quad 2^5 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7), \quad 2^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7), \mathrm{etc.}$$

D'aquí resulta que

$$\begin{aligned} 2^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7) &\Longleftrightarrow n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 2^n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7) &\Longleftrightarrow n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 2^n \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7) &\Longleftrightarrow n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3). \end{aligned}$$

Com que $2^n - 1$ és múltiple de 7 si i només si n és múltiple de 3, les solucions del problema són tots els enters positius múltiples de 3.
Fixeu-vos que a més a més de resoldre el problema proposat hem obtingut tots aquests altres resultats.
La solució amb enters positius de l'equació $2^n + 6 \equiv 0 \pmod 7$ la formen tots els enters positius $n \equiv 0 \pmod 3$.

Les solucions amb enters positius de les equacions $2^n - 2 \equiv 0$ i $2^n + 5 \equiv 0 \pmod 7$ les formen tots els enters positius $n \equiv 1 \pmod 3$.
Les solucions amb enters positius de les equacions $2^n - 4 \equiv 0$ i $2^n + 3 \equiv 0 \pmod 7$ les formen tots els enters positius $n \equiv 2 \pmod 3$.
Les equacions $2^n - 6 \equiv 0$, $2^n + 1 \equiv 0$, $2^n - 3 \equiv 0$, $2^n + 4 \equiv 0 \pmod 7$ no tenen solució amb enters positius.

Problema 12. Trobeu totes les parelles de nombres enters (x, y) tals que $x^2 = 21 + 4y^2$.

Aquest és un problema d'aritmètica que té una interpretació geomètrica important. L'equació donada es pot escriure en la forma $\dfrac{x^2}{21} - \dfrac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1$, on reconeixem que es tracta de l'equació d'una hipèrbola de semieixos $a = \sqrt{21}$, $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{21}$. Per tant el problema s'hauria pogut enunciar així:
Trobeu tots els punts de coordenades enteres de la cònica $x^2 = 21 + 4y^2$.
Aquest és un cas particular del problema següent: Trobar els punts de coordenades enteres d'una cònica donada per una equació amb coeficients enters.
En general aquest és un problema d'aritmètica difícil, però en casos particulars com per exemple la nostra cònica, es pot resoldre fàcilment.
Si escrivim l'equació de la cònica en la forma $x^2 - 4y^2 = 21$, observarem que el primer membre és una diferència de quadrats i per tant es pot posar en la forma $(x-2y)(x+2y) = 21$. Com que x, y han de ser enters, també ho han de ser $x - 2y$, $x + 2y$ i aquests podran prendre tants valors com possibles descomposicions en factors enters del nombre 21. Com que $21 = 1 \cdot 21 = (-1) \cdot (-21) = 3 \cdot 7 = (-3) \cdot (-7)$, les solucions estaran entre les dels sistemes:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 21 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = 21 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ x + 2y = -21 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = -21 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = 7 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ x + 2y = -7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = -7 \\ x + 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Aquestes són respectivament $(11, 5)$, $(11, -5)$, $(-11, -5)$, $(-11, 5)$, $(5, 1)$, $(5, -1)$, $(-5, 1)$, i com que totes són enteres, totes són solucions del problema. Per tant els únics punts de coordenades enteres de la hipèrbola d'equació $x^2 = 21 + 4y^2$ són els que acabem de trobar. Intenteu dibuixar aquesta hipèrbola.

Problema 13. Per cada nombre natural n escrivim

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \qquad\qquad b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

a) Demostreu que a_n i b_n són senars per tot nombre natural n.
b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n+1}{2}, \qquad \frac{a_n-1}{2}.$$

Observeu que en aquest cas es tracta de demostrar unes propietats que les satisfan tots els nombres naturals. Per als problemes d'aquest tipus és sempre molt útil tenir present una propietat que és característica del conjunt dels nombres naturals, i que ara enunciarem.

> **Principi d'inducció matemàtica**.
> Si C és un conjunt de nombres naturals que compleix
> 1) 1 pertany a C
> 2) si un nombre natural k pertany a C, el seu següent $k+1$ també pertany a C
>
> llavors C és el conjunt de tots els nombres naturals.

Aquest principi és un axioma pel conjunt dels nombres naturals, és a dir no es demostra. El podem aplicar sempre que volguem demostrar que una propietat és certa per tots els nombres naturals. N'hi ha prou a provar que és certa per a 1 i que si és certa per a un natural arbitrari k també ho és per al seu següent $k+1$.
És interessant veure com induint podríem descobrir les propietats enunciades en el problema.
Part a). Calculeu el valor de l'expressió $(1+\sqrt{2})^{2n+1}$ per uns quants nombres naturals consecutius, començant per $n=1$.

$$n=1 \quad (1+\sqrt{2})^3 = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2 = (1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 7+5\sqrt{2}$$
$$n=2 \quad (1+\sqrt{2})^5 = (1+\sqrt{2})^3(1+\sqrt{2})^2 = (7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 41+29\sqrt{2}$$
$$n=3 \quad (1+\sqrt{2})^7 = (1+\sqrt{2})^5(1+\sqrt{2})^2 = (41+29\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 239+169\sqrt{2}$$

Podeu continuar un xic més donant a n uns quants valors més, i observem que en tots els casos és

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

on a_n i b_n són nombres enters imparells. Ens preguntem si això serà cert per tots els valors de n. La resposta la trobem aplicant el principi d'inducció.
Ja hem vist que és cert per a $n = 1$.
Suposem que és cert per a un natural qualsevol $n = k$, és a dir que se satisfà

$$(1+\sqrt{2})^{2k+1} = a_k + b_k\sqrt{2}$$

on a_k i b_k són nombres naturals imparells. Calculem

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{2(k+1)+1} =&(1+\sqrt{2})^{2k+3} = (1+\sqrt{2})^{2k+1}(1+\sqrt{2})^2 = (a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\ =&(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Com que a_k i b_k són per hipòtesi nombres naturals imparells, $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ i $b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ també seran imparells, i pel principi d'inducció seran imparells per tot valor natural de n
Part b). És clar que en ser a_n imparell, $\dfrac{a_n-1}{2}$ i $\dfrac{a_n+1}{2}$ seran enters. Calculem-los per uns quants valors de n.

$$\begin{aligned}
n=1 \quad & \frac{a_1-1}{2}=3 \quad \frac{a_1+1}{2}=4 \quad b_n=5\\
n=2 \quad & \frac{a_2-1}{2}=20 \quad \frac{a_2+1}{2}=21 \quad b_n=29\\
n=3 \quad & \frac{a_3-1}{2}=119 \quad \frac{a_3+1}{2}=120 \quad b_n=169
\end{aligned}$$

Observem que és $3^2+4^2=25=5^2$, $20^2+21^2=881=29^2$, $119^2+121^2=28651=169^2$ és a dir que les ternes (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169) són solucions de l'equació $x^2+y^2=z^2$ i per tant compleixen el teorema de Pitàgoras.
Per demostrar que per a tot n se satisfà

$$\left(\frac{a_n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2 = {b_n}^2$$

escrivim aquesta igualtat en la forma

$$a_n^2 + 1 = 2b_n^2$$

que ja hem vist que és certa per a $n = 1$. Suposem que és certa per a un natural qualsevol $n = k$ és a dir que $a_k^2 + 1 = 2b_k^2$ i anem a provar que també ho és per a $n = k + 1$. Com que $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ i $b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ resulta

$$a_{k+1}{}^2 + 1 = (3a_k + 4b_k)^2 + 1 = 8a_k^2 + 24a_k b_k + 18b_k^2 = 2(2a_k + 3b_k)^2 = 2b_{k+1}^2.$$

Pel principi d'inducció queda demostrat que per a tot natural n, $\dfrac{a_n - 1}{2}$ i $\dfrac{a_n + 1}{2}$ són els catets d'un triangle rectangle de hipotenusa b_n.

Problema 14. Proveu que si $n \in \mathbb{Z}$ és positiu i p és primer, llavors $n^p - n$ és múltiple de p.

Com que un enter positiu s'identifica amb un nombre natural podem aplicar el principi d'inducció.
Per a $n = 1$ és $1^p - 1 = 0$ i com que el zero és múltiple de tots els nombres, és múltiple de p.
Suposem que per a un nombre natural qualsevol k és $k^p - k$ múltiple de p, i calculem

$$\begin{aligned}(k+1)^p - (k+1) &= k^p + \binom{p}{1}k^{p-1} + \binom{p}{2}k^{p-2} + \cdots + \binom{p}{j}k^{p-j} + \cdots + \binom{p}{p-1}k + 1 \\ &\quad - (k+1) \\ &= k^p - k + \binom{p}{1}k^{p-1} + \binom{p}{2}k^{p-2} + \cdots + \binom{p}{j}k^{p-j} + \cdots + \binom{p}{p-1}k.\end{aligned}$$

Com que per la hipòtesi d'inducció $k^p - k$ és múltiple de p, només cal demostrar que la suma restant és múltiple de p. Demostrarem que cada sumand és múltiple de p (que és més fort que el que ens demanen), provant que $\binom{p}{j}k^{p-j}$ $j = 1, 2, ..., p-1$ és múltiple de p. Sabem de la teoria combinatòria que

$$\binom{p}{j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}$$

i que és un nombre natural; pel problema 9 sabem que l'exponent en que figura p en $p!$ és 1, i com que $j < p$ i $p - j < p$ en $j!$ i en $(p-j)!$ hi figurarà amb exponent 0 per tant en el quocient $\dfrac{p!}{j!(p-j)!}$ amb exponent 1, és a dir és múltiple de p.
Als matemàtics, meditar sobre un problema resolt els porta quasi sempre a fer-se noves preguntes. Anem a fer-nos-en nosaltres. Fixeu-vos que a l'enunciat del problema s'imposa la condició que n sigui un enter positiu, i això ens ha permès fer la demostració per inducció.

Primera pregunta. És pot afirmar el mateix quan n és negatiu? És clar que la demostració per inducció no és vàlida. Però considereu alguns casos particulars. Per exemple poseu $p = 5$ i calculeu $n^5 - n$ per uns quants valors negatius de n, i trobareu que sempre és múltiple de 5. Abans de arriscar-nos a conjecturar res proveu per a alguns altres nombres primers per exemple $p = 7, 11$ i trobareu que sempre se satisfà. Ara ens atrevim a conjecturar

Per tot enter a i tot primer p, $a^p - a$ és múltiple de p.

Cal intentar de trobar una demostració.

Per això posarem $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Si a és múltiple de p és obvi que $a(a^{p-1} - 1)$ és múltiple de p. Però si p no divideix a i la conjectura és certa, p ha de dividir $a^{p-1} - 1$ que és el que hem de demostrar. Això és cert, i és una proposició molt important d'aritmètica que s'anomena *Congruència de Fermat*, fent honor al matemàtic que la va enunciar per primera vegada. Pel seu nom ja deveu sospitar que per demostrar-la utilitzarem les congruències que vàrem introduir en el problema 10. Anunciarem la proposició així:

> **Congruència de Fermat**. Si p és un nombre primer, i a un enter qualsevol primer amb p, és compleix
>
> $$a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p).$$

Demostració. Considerem els nombres 1,2,...$p-1$. Cadascun d'ells pertany a una classe diferent mòdul p, i com que són tots els residus possibles que es podem obtenir en dividir un enter per p, les classes a les quals pertanyen són totes les classes possibles. Considerem ara els nombres $a \cdot 1$, $a \cdot 2$,...,$a \cdot (p-1)$. Aquests nombres són incongrus dos a dos ja que si $a \cdot k \equiv a \cdot l \pmod{p}$, $1 \leq k, l \leq p-1$ seria $a \cdot k - a \cdot l = a(k-l)$ múltiple de p i com que p no divideix a, p hauria de dividir $k - l$ o sigui que seria $k \equiv l \pmod{p}$ en contra del que hem dit abans. Per tant com que en tenim $p-1$, cadascun d'ells haurà de ser congru amb un i només un dels 1,2,...,$p-1$. Aplicant les propietats de les congruències és pot escriure

$$a \cdot 1 \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdots p - 1 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod{p}$$

o sigui $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Com que $\text{mcd}(p, (p-1)!) = 1$ és pot simplificar la congruència dividint els dos membres per $(p-1)!$ i s'obté

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

que és el que voliem demostrar.

Segona pregunta. Què passa quan el mòdul no és un nombre primer? Comenceu amb un cas particular prenent, per exemple, per mòdul $m = 6$ i fent $a = 5$. És $\mathrm{mcd}(5, 6) = 1$, i $a^{m-1} = 5^5 \equiv 5 \pmod 6$, per tant no es compleix la congruència de Fermat. Alguna cosa de la demostració falla quan el mòdul no és primer. Repasseu-la a veure si ho trobeu. Podríem deixar aquí la qüestió per acabada, però encara ens farem una

Tercera pregunta. Pot ser que per un altre exponent $\phi(m)$ relacionant amb el mòdul d'una manera que es pugui determinar, resulti que si $\mathrm{mcd}(a, m) = 1$ és $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$? La resposta és afirmativa, i anem a veure qui pot ser $\phi(m)$. Hem vist que en el cas en què m no és primer, la interpretació de l'exponent com el mòdul menys 1 no és vàlida; però es pot trobar una altra interpretació de l'exponent que si que sigui vàlida. Fixem-nos que si p és primer, els nombres 1, 2, 3,...,$p-1$ són tots primers amb p, per tant $p-1$ és també el nombre de nombres naturals primers amb p i menors que p. Serà aquesta la interpretació vàlida de l'exponent? Tornem al cas $m = 6$. Els nombres primers amb 6 i menors que 6 són 1 i 5, és a dir n'hi ha dos. Calculem $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod 6$. És cert!. Proveu-ho per alguns altres nombres i veureu que sempre és cert. Si heu fet el que us he dit de mirar on fallava la demostració, probablement ja us haureu adonat que els nombres que presentaven dificultats eren els menors que m i no primers amb m, per tant la conclusió a la que hem arribat tampoc és estranya. Procedim a enunciar correctament i a demostrar la següent proposició que s'anomena

Congruència d'Euler. Si m és un nombre natural $m > 1$, a és un nombre enter primer amb m, i s'indica per $\phi(m)$ el nombre de nombres naturals primers amb m i menors que m, es compleix:

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m.$$

Observeu que la congruència de Fermat és un cas particular de la congruència d'Euler.

Demostració. Siguin b_1, b_2,...,$b_{\phi(m)}$ tots els nombres naturals primers amb m i menors que m. Ara només cal seguir el raonament fet a la congruència de Fermat. Aquests nombres són incongrus dos a dos segons el mòdul m. Com que $\mathrm{mcd}(a, m) = 1$, els nombres $a \cdot b_1$, $a \cdot b_2$,...,$a \cdot b_{\phi(m)}$ seran també incongrus dos a dos i cadascun d'ells congru amb un i només un dels b_1, b_2,...,$b_{\phi(m)}$. Per tant

$$a \cdot b_1 \cdot a \cdot b_2 \cdots a \cdot b_{\phi(m)} \equiv b_1 \cdot b_2 \cdots b_{\phi(m)} \pmod m$$

o sigui

$$a^{\phi(m)}(b_1 \cdot b_2 \cdots b_{\phi(m)}) \equiv b_1 \cdot b_2 \cdots b_{\phi(m)} \pmod{m}$$

Com que cada b_i és primer amb m és pot simplificar la congruència i s'obté

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

que és el que voliem demostrar.
Ens queda encara una

Quarta pregunta. Com podem calcular el nombre $\phi(m)$ anomenat *indicador* de m? És clar que si m és un nombre primer $\phi(m)$ és $m-1$. El pas següent que sembla natural fer és calcular $\phi(p^a)$ on p és un nombre primer. Els nombres menors que p^a i que són primers amb p^a són els nombres compresos entre 1 i p^a que no són múltiples de p. Com que múltiples de p n'hi ha p^{a-1} d'aquí resulta que

$$\phi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1)$$

Si m no és la potència d'un primer podem pensar en descompondre m en factors primers, és a dir $m = p^{a_1} \cdot p^{a_2} \cdots p^{a_n}$, però no sabem com es comporta l'indicador respecte del producte. Com sempre posem-nos un exemple. Volem calcular $\phi(18)$; si contem quants nombres hi ha primers amb 18 i menors que 18 veurem que n'hi ha 6. Posem 18=3.6=2.9; si l'indicador del producte fos igual al producte dels indicadors resultaria $\phi(18)=\phi(3)\,\phi(6)=4$, la qual cosa és falsa. Però en canvi si posem $\phi(18)=\phi(2)\,\phi(9)=6$ i això és cert. Observem que l'indicador del producte no és sempre igual al producte dels indicadors dels factors; ha resultat fals en el cas en què els dos factors tenen un divisor comú, i vertader quan són primers entre si. El que hem observat és cert i podem enunciar la següent proposició que no demostrarem perquè encara no tenim tots els recursos necessaris.

Proposició. Si k i l són dos nombres naturals tals que $\operatorname{mcd}(k,l) = 1$, llavors

$$\phi(k \cdot l) = \phi(k)\phi(l)$$

.

Aquesta proposició ens diu com hem de calcular $\phi(m)$. Si $m = p^{a_1} \cdot p^{a_2} \cdots p^{a_n}$, com que $\operatorname{mcd}(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1$ per $i,j = 1,2,...,r$, es té la fórmula següent:

$$\phi(m) = p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2-1} \cdots p_r^{a_r-1} \cdot (p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdots(p_r-1).$$

Encara un parell d'observacions.

1) La congruència d'Euler afirma que si $\text{mcd}(a, m) = 1$ és $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Però es poden donar casos que per alguns nombres a (que poden ser tots segons quin sigui el mòdul m) existeixin nombres k menor que $\phi(m)$ tals que $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Per exemple per $m = 11$, $\phi(11)$=10 però $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$. És clar que k ha de ser sempre un divisor de $\phi(m)$; efectivament 5 divideix 10.

2) Hem de fixar-nos molt bé en el que s'afirma en una proposició. Per exemple algú podria caure en la temptació de pensar que si segons un mòdul m es compleix la congruència de Fermat, aquest mòdul és primer. Això seria un gran error perquè afirmaria la recíproca de la congruència de Fermat. I efectivament no és cert, ja que existeixen nombres compostos que la compleixen, i aquests nombres s'anomenen nombres de Carmichael. El més petit d'ells és $m = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$, és a dir es compleix que si $\text{mcd}(a, 561) = 1$, $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

Problema 15. Proveu que $\sqrt{7}$ no és racional.

Aquest problema és equivalent a demostrar que l'equació $x^2 = 7$ no té cap solució en nombres racionals.

Observeu que n'hi ha prou provant que no té cap solució racional positiva, ja que si un nombre és solució també ho és el seu oposat.

És clar que no en té cap d'entera. Demostrarem que no en té cap de fraccionària fent la demostració per reducció a l'absurd, que consisteix a suposar que té una solució i veure que s'arriba a una contradicció.

Suposem que $\dfrac{p}{q}$ és el representant irreductible d'una solució de l'equació $x^2 = 7$, és a dir, $\text{mcd}(p, q) = 1$ i $(\dfrac{p}{q})^2 = 7$. D'aquí resulta $\dfrac{p^2}{q^2} = 7$, i $p^2 = 7q^2$. Com que 7 és primer i 7 divideix p^2, també 7 divideix p. Posant $p = 7p'$ resulta $7^2(p')^2 = 7q^2$, i simplificant $7{p'}^2 = q^2$. Repetint el raonament, com que 7 és primer i divideix q^2, també divideix q, per tant 7 divideix p i q contra l'hipòtesi de ser $\text{mcd}(p, q) = 1$.

Problema 16. Sigui la successió 3, 7, 11, 15,...Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

Aquest problema conté implícitament la afirmació que de nombres primers n'hi ha infinits, i això per ara no ho sabem, ja que podria ocórrer que a partir d'un nombre endavant tots els nombres naturals fossin compostos. Llavors el nostre problema no tindria sentit.

Aquesta pregunta se la van formular els grecs i Euclides en va donar una resposta afirmativa demostrant per reducció a l'absurd la següent

Proposició. La sèrie natural conté infinits primers.

La demostració és aquesta. Si només n'hi hagués un nombre finit hi hauria un primer p que seria el més gran. Formem el producte $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdots p$ de tots els nombres primers i considerem el nombre

$$N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdots p+1$$

Com que N és més gran que 1 o és primer o descompon en producte de factors primers. No pot ser primer perquè tots els primers figuren en el producte $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdots p$ i N és més gran que aquest producte, per tant més gran qualsevol dels factors. Sigui q un factor primer de N. Com que el producte $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdots p$ conté tots els nombres primers, q ha de ser un d'ells. Per tant com que q divideix N i divideix $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdots p$, q divideix 1, i això és una contradicció. D'aquí resulta que ha d'existir un primer q més gran que p i per tant, infinits.

Altres vegades hem enunciat una proposició i hem omès la demostració, però en aquest cas l'hem feta per veure com ens pot inspirar per resoldre el nostre problema. Observem que la proposició que hem demostrat la podríem enunciar de la forma equivalent:

La progressió aritmètica de terme general $2n+1$ *conté infinits nombres primers.* Per altra part observem que la successió del problema és una progressió aritmètica de primer terme 3 i raó 4 és a dir de terme general $4n-1, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Resolució del problema. Procedim com abans per reducció l'absurd, és a dir, suposem que a partir d'un primer endavant tots els primers són de la forma $4n+1$, ja que tot nombre imparell és de una de les dues formes $4n-1$ o $4n+1$. Sigui p el primer més gran de la forma $4n-1$. Seguint la demostració anterior formem un nombre N adequat

$$N = 4\cdot 3\cdot 5\cdots p-1$$

on el producte $3\cdots(p-1)$ conté tots els primers imparells menors o igual a p. Com que N és de la forma $4n-1$ i és més gran que p no pot ser primer; per tant descompondrà en producte de factors primers. Tot primer que divideix N ha de ser més gran que p, ja que si no dividiria N i el producte $4\cdot 3\cdots p-1$ i per tant dividiria 1, la qual cosa és absurda. Com que p és el més gran de la forma $4n-1$, tot primer que divideixi a N ha de ser de la forma $4n+1$ i per tan el seu producte N també de la forma $4n+1$ i això és fals tal com s'ha construït N.

Per tant la progressió aritmètica considerada conté infinits nombres primers.

Observem que en el raonament que acabem de fer hi entra d'una manera molt clara la forma particular de la progressió. Això ja ens fa pensar que potser en alguns altres casos particulars és podran fer raonaments anàlegs, però que en general, per qualsevol progressió aritmètica no.

Considerem per exemple la progressió 5, 8, 11, 14,... és a dir la de terme general $4n+1$, que és la primera que ens salta a la vista. Seguim el raonament anterior i veiem que tot va bé fins que arribem a formar el producte de primers de la forma $4n-1$ ja que el producte d'un nombre parell d'ells és de la forma $4n+1$ i per tant no hi ha contradicció.

Intentem cercar un altre camí de demostració que, per aquest cas, veurem que també el tenim; es tracta de demostrar que donat un nombre natural qualsevol $N>1$ sempre existeix un primer de la forma $4n+1$ que és més gran que n. Per això utilitzarem la Congruència de Fermat.

Considerem un nombre natural $N>1$ i formem el nombre imparell

$$m=(N!)^2+1$$

Sigui p el factor primer més petit de m, que serà més gran que N ja que tot nombre menor o igual a N divideix $N!$. Com que p divideix $m=(N!)^2+1$ serà $(N!)^2\equiv -1 \pmod{p}$. Elevant els dos membres d'aquesta congruència al quadrat s'obté

$$(N!)^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Com que p no divideix $N!$ per la congruència de Fermat és

$$(N!)^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}.$$

Per tant de les dues congruències resulta $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$. Si $\frac{p-1}{2}$ fos imparell seria $-1\equiv 1 \pmod{p}$ és a dir $p=2$ la qual cosa no és possible perquè m és imparell. Per tant $\frac{p-1}{2}=2n$ és a dir p és de la forma $4n+1$ i per tant pertany a la progressió donada.

Per a algunes altres progressions aritmètiques particulars podríem trobar mètodes com aquests (o encara que un xic més difícils), que sense gaire esforç es poden arribar a entendre. Però queda la pregunta general:

Tota progressió aritmètica conté infinits termes primers? La resposta és afirmativa si en té un. És clar que si el primer terme i la raó de la progressió tenen algun factor comú, la progressió no té cap terme primer. Però pels altres casos és compleix el següent

> **Teorema**. Si $\mathrm{mcd}(a,r)=1$ la progressió aritmètica $a+rn$ $n=1,2,...$ conté infinits nombres primers.

Aquest és un teorema molt important de l'aritmètica, i és de demostració molt difícil. Es necessiten mètodes analítics que van més enllà, però molt més enllà, del que es pot entendre a aquests nivells.

Problema 17. Determineu tots els triangles rectangles de costats enters.
Aquest problema és equivalent al problema aritmètic següent:
Trobeu totes les solucions enteres positives de l'equació

$$X^2+Y^2=Z^2.$$

Observeu en primer lloc que si tenim una solució (X_0,Y_0,Z_0), qualsevol terna $(\lambda X_0,\lambda Y_0,\lambda Z_0)$, on λ és qualsevol nombre enter positiu, serà també solució; i si els tres membres de la terna tenen un divisor comú, s'obtindrà una altra solució dividint-los per aquest divisor comú. Per tant n'hi ha prou a cercar totes les solucions en les que X, Y, Z són primers entre si. Aquestes solucions s'anomenen primitives i a partir d'elles s'obtindran totes les altres multiplicant-les per tots els nombres naturals. També és clar per la forma de l'equació que, si els tres nombres X_0, Y_0, Z_0 són primers entre si, també seran primers entre si dos a dos. Feta aquesta observació, passem a resoldre el problema. Com que Z ha de ser diferent de 0, podem dividir els dos membres per Z^2 i s'obté l'equació

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^2+\left(\frac{Y}{Z}\right)^2=1$$

y posant $\dfrac{X}{Z}=x$,$\dfrac{Y}{Z}=y$ obtenim una equació de la forma

$$x^2+y^2=1$$

que representa una circumferència de centre l'origen de coordenades i radi 1.
Si X, Y, Z són nombres enters $Z\neq 0$, $\dfrac{X}{Z}$, $\dfrac{Y}{Z}$ seran nombres racionals, i per tant a les solucions del nostre problema els corresponen punts racionals de la circumferència. Intentem doncs de resoldre aquest altre

Problema 18. Trobeu tots els punts de coordenades racionals de la circumferència d'equació $x^2+y^2=1$.

Observeu en primer lloc que el punt $A(-1,0)$ pertany a la circumferència. Escriviu l'equació del feix de rectes que passen per aquest punt $y=t(x+1)$ on t és un paràmetre. Busqueu els punts d'intersecció de les rectes d'aquest feix amb la circumferència, resolent el sistema d'equacions amb les incògnites x, y

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=1 \\ y=t(x+1) \end{array}\right\}$$

Es té $x^2+t^2(x+1)^2=1$, o sigui $x^2-1+t^2(x+1)"=0$ i traient $x+1$ factor comú

$$(x+1)(x-1+t^2(x+1))=0$$

Una solució es troba fent $x+1=0$, o sigui $x=-1$, que correspon al punt $A(-1,0)$ que pertany a la circumferència i a totes les rectes del feix. L'altra s'obté resolent l'equació $x-1+t^2(x+1)=0$ o sigui $x(1+t^2)^2=1-t^2$ d'on resulta

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y=t(x+1)=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

A cada valor real de t correspondrà un punt de la circumferència i a cada punt de la circumferència menys $A(-1,0)$ que ja l'havíem trobat abans, un valor real de t.

Si x, y son nombres racionals diferents de -1, $t=\dfrac{y}{x+1}$ serà un nombre racional, y si t és un nombre racional, pels resultats obtinguts x, y seran nombres racionals.

Suposeu t racional i sigui $\dfrac{m}{n}$ el seu representant irreductible. Substituint t per aquest valor a les expressions obtingudes per x, y resulta:

$$x=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, \quad y=\frac{2mn}{n^2+n^2}.$$

Donant a m i n tots els parells de valors enters primers entre si obtindreu tots els punts racionals de la circumferència $x^2+y^2=1$ menys el punt $A(-1,0)$.

Tornem al nostre problema:

Com que havíem posat $\dfrac{X}{Z}=x$, $\dfrac{Y}{Z}=y$ serà

$$\frac{X}{Z}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, \quad \frac{Y}{Z}=\frac{2mn}{n^2+m^2}$$

i com que havíem suposat que $\operatorname{mcd}(X,Z)=1$, $\operatorname{mcd}(Y,Z)=1$ ha de ser

$$n^2-m^2=\lambda X, \quad 2mn=\lambda Y, \quad n^2+n^2=\lambda Z$$

per a algun valor enter de λ que cal calcular: λ divideix $n^2 - m^2$ i $n^2 + m^2$ i per tant divideix la seva suma $2n^2$ i la seva diferència $2m^2$, i per tant ha de dividir 2 ja que hem suposat m i n primers entre si. És a dir λ només pot ser 1 o 2. Anem a veure que no pot ser 2.
X, Y no poden ser a la vegada parells ni a la vegada imparells. El primer és clar ja que $\mathrm{mcd}(X, Y) = 1$. Si fossin ambdós imparells, observant que el quadrat d'un nombre imparell és sempre congru amb 1 segons el mòdul 4, seria $X^2+Y^2 \equiv 2 \pmod 4$ i $Z^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. Per tant o bé X serà parell i Y imparell o al revés, però n'hi ha prou en considerar un dels dos casos ja que l'equació $X^2 + Y^2 = Z^2$ és simètrica respecte les incògnites X, Y.
Suposem X parell i $\lambda = 2$. λX seria divisible per 2 però no per 4 i $n^2 - m^2 \equiv 2 \pmod 4$. Però m^2 i n^2 seran o un congru amb 0 i l'altre congru amb 1 segons el mòdul 4 o tots dos seran congrus amb 1 segons el mòdul 4. Per tant λ no pot ser 2; és a dir ha de ser $\lambda = 1$.
Hem arribat així a la solució del problema:
Les longituds dels costats dels triangles rectangles primitius s'obtenen posant

$$X = n^2 - m^2, \quad Y = 2mn, \quad Z = n^2 + m^2$$

i donant a m, n totes les parelles de valors naturals possibles primers entre si.

Problema 19. Trobeu totes les solucions amb nombres naturals de l'equació

$$x^3 + y^3 = 1729.$$

Si mireu un xic detingudament el nombre 1729, observereu sense gran esforç que

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3 \quad \text{i també} \quad 1729 = 1 + 1728 = 1^3 + 12^3$$

per tant ja heu obtingut les quatre solucions

$$x = 10, y = 9; \quad x = 9, y = 10; \quad x = 1, y = 12; \quad x = 12, y = 1.$$

Però el problema ens les demana totes. N'hi ha d'altres? Anem a veure que són les úniques. Per això escrivim l'equació proposada d'una altra manera observant que

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{i que} \quad 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19.$$

$$\text{i per tant} \qquad (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 7 \cdot 13 \cdot 17.$$

Ara es tracta d'igualar de totes les maneres possibles els factors del primer membre amb factors del segon membre, però per evitar-nos feina farem un raonament més general. Posem

$$\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ x^2-xy+y^2=b \end{array}\right\} \qquad \text{amb} \qquad ab=1729=7.13.19$$

Resolem el sistema d'equacions aïllant x a la primera i substituint a la segona; després de fer operacions arribem a l'equació de segon grau

$$3x^2-3ax+a^2-b=0.$$

Per tant

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{12b-3a^2}}{6}$$

Mirem totes les condicions que han de satisfer a i b. Recordem que $a\cdot b=7\cdot 13\cdot 19$; a més a més ha de ser $a>1$, $12b-3a^2\geq 0$ i quadrat d'un nombre enter. Amb aquestes condicions veureu tot seguit que els únics valors de a i b són $a=13$, $b=7\cdot 19$; $a=19$, $b=7\cdot 13$; a aquests valors corresponen els valors de x, y que havíem obtingut al principi. Per tant aquelles són les úniques solucions

Problemes

AR1. Proveu que si els tres costats d'un triangle rectangle vénen expressats per tres nombres naturals en progressió aritmètica llavors el seu perímetre és múltiple de 12.

AR2. Els tres nombres naturals $1652_{(n}$, $2012_{(n}$, $2042_{(n}$ (escrits en base n) estan en progressió aritmètica. Determineu la base n de numeració i la raó de la progressió.

AR3. Un nombre de tres xifres en base 10 s'escriu xyz en el sistema de base 7 i zyx en el sistema de base 9. Determineu aquest nombre escrit en base 10.

AR4. Proveu que l'única parella d'enters positius (a,b) per a la qual la suma coincideix amb el producte és la $(2,2)$.

AR5. Proveu que només hi ha una parella d'enters positius (a,b) tal que $a^b=b^a$ i trobeu-la.

AR6. Resoleu en el conjunt dels nombres naturals l'equació

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1.4375\ .$$

AR7. En un nombre de tres xifres, la suma d'elles és 15, la xifra de les desenes és doble de la de les unitats, i la diferència entre el nombre i el que resulta d'invertir les xifres és 297. Determineu aquest nombre.
Discutiu el problema en el cas general, és a dir si la suma de les xifres és s i la diferència que s'obté en invertir l'ordre de les seves xifres és d.

AR8. Trobeu els valors naturals de x per als quals $x^2+5x+160$ és un quadrat perfecte.

AR9. Determineu els enters N que contenen solament els factors 2 i 3 i tals que el nombre de divisors de N^2 és triple del nombre de divisors de N.

AR10. Un nombre té 216 divisors, el seu doble té 270 divisors, la seva tercera part té 180 divisors i la seva cinquena part té 144 divisors. Trobeu aquest nombre amb la condició que sigui el més petit possible.

AR11. Trobeu un nombre de quatre xifres, quadrat perfecte, sabent que la suma de les seves xifres és igual a la suma de les xifres de la seva arrel quadrada. Determineu totes les solucions.

AR12. Demostreu que per a tot valor natural de n,

$$3^{2n+2}+2^{6n+1}$$

és múltiple de 11.

AR13. Una pila de boles de base rectangular té a la base $m\cdot n$ boles i les altres capes es formen col·locant una bola en el forat que deixen les quatre boles de la capa anterior, i així successivament fins que s'arriba a una capa formada per una sola fila. Calculeu quantes boles té la pila sabent que m és el nombre de diagonals que té un decàgon i n és el menor nombre que dividit per 4 dóna residu 3, dividit per 5 dóna residu 4 i dividit per 6 dóna residu 5.

AR14. Determineu en quants zeros acaba 1000!

AR15. Proveu que $\pi(n) \geq \dfrac{\log n}{log 4}$, on $\pi(n)$ és el nombre de primers que no sobrepassen el nombre natural n. (*Teorema de* Wacław Sierpinski).

AR16. Determineu x,y i z per tal que el nombre $33xy49z$ (escrit en base 10) sigui múltiple de 693.

AR17. Calculeu dos nombres de la forma aa, $bbcc$ tals que

$$aa = \sqrt{bbcc}.$$

AR18. Calculeu l'enter més petit x pel qual $x^2 + x + 41$ és compost.

AR19. Demostreu que si dos nombres enters són de la mateixa paritat, la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

AR20. a) Trobeu tots els enters positius n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7.

b) Demostreu que no existeix cap enter positiu tal que $2^n + 1$ és divisible per 7.

AR21. Demostreu que si $2^n - 1$ és primer, llavors n és primer.

AR22. Demostreu

a) Per tot n existeixen n nombres consecutius compostos.

b) Per tot n existeixen n nombres consecutius tals que cap d'ells és la potència d'un primer.

AR23. Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6 per tal que el seu producte acabi en 36.

AR24. Trobeu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primeres xifres i el format per les dues darreres xifres.

AR25. Proveu que $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ no pot ser expressat com a producte de menys de n primers (no necessàriament diferents).

AR26. El nombre natural

$$3^n+2\cdot 17^n$$

no és quadrat perfecte per cap natural n.

AR27. La suma dels dígits de $N=4444^{4444}$ (escrit en notació decimal) és A. La suma dels dígits de A és B i la suma dels dígits de B és C. Calculeu C.

AR28. Siguin n, m nombres naturals qualssevol. Demostreu que

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

és un enter.

AR29. Demostreu que si a i b són enters positius, llavors, si

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

és un enter, és un quadrat perfecte.

AR30. Un nombre natural és perfecte si és igual a la suma dels seus divisors menors que ell. Demostreu que si 2^n-1 és primer llavors $2^{n-1}(2^n-1)$ és perfecte.

AR31. Proveu que si p és un nombre primer diferent de 2 i 5, p divideix infinits termes de la successió 9, 99, 999, 9999,...Proveu el mateix per la successió 1, 11, 111, 1111,...

AR32. Proveu que n^2+3n+5 no és mai divisible per 121.

AR33. Proveu que $2222^{5555}+5555^{2222}$ és divisible per 7.

AR34. Proveu que si tots els coeficients de l'equació $ax^2+bx+c=0$ són imparells, les arrels d'aquesta equació no poden ser racionals.

AR35. Proveu que tots els nombres de la forma 10001, 100010001, 1000100010001,...són compostos.

AR36. Trobeu totes les solucions en nombres enters de l'equació

$$x^2y^2 = 5x^2y + 20x + 16.$$

AR37. Si $T_0 = 2$, $T_{n+1} = {T_n}^2 - T_n + 1$, proveu que $\text{mcd}(T_n, T_m) = 1$, $m \neq n$.

AR38. Proveu que $1^{1983} + 2^{1983} + \cdots + 1986^{1983} \equiv 0 \pmod{1987}$.

AR39. Si a, b, x, y són nombres naturals, $\text{mcd}(a,b) = 1$ i $x^a = y^b$, proveu que existeix un nombre natural n tal que $x = n^b$, $y = n^a$.

AR40. Trobeu totes les solucions en nombres naturals del sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{c} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{array}\right\}$$

AR41. Proveu que l'equació $x^2+y^2=3z^2$ només té en nombres enters la solució $x=0$, $y=0$, $z=0$. Com a conseqüència proveu que la circumferència $x^2+y^2=3$ no té cap punt de coordenades racionals.

AR42. Trobeu tots els punts de coordenades racionals de la circumferència $x^2+y^2=2$.

AR43. Trobeu totes les solucions amb nombres enters de l'equació $x^3+y^3=793$.

AR44. Proveu que si p és un nombre primer imparell, l'equació $x^3+y^3=p$ o bé no té cap solució en nombres enters, o bé p és de la forma $3n^2+3n+1$.

Mostra de solucions

Solució del problema AR4

La condició $ab = a+b$ es pot escriure $(a-1)(b-1) = 1$ que només té les solucions enteres $a-1 = 1, b-1 = 1$ o bé $a-1 = -1, b-1 = -1$. La segona parella queda exclosa perquè dóna $a = 0, b = 0$. La primera dóna $a = 2, b = 2$.
Si a, b fossin racionals (o reals), l'equació tindria una infinitat de solucions

$$a = \frac{b}{b-1}$$

on b és un racional (real) arbitrari diferent de 1.

Solució del problema AR5

Suposem $a^b = b^a$ amb $1 < a < b$ enters positius. Podem escriure $b = a+n$ amb $n \geq 1$ i queda $b^a = a^b = a^{a+n} = a^a a^n$ d'on surt $a^n = (b/a)^a$. Si fem $\lambda = b/a > 1$ queda $b = \lambda a$ i $n = b - a = a(\lambda - 1)$. Substituint, $a^{a(\lambda-1)} = \lambda^a$ o bé $a^{\lambda-1} = \lambda$, d'on, fent $a = 1+k$, queda $\lambda = (1+k)^{\lambda-1}$ o bé

$$(\lambda-1)(k-1) + \binom{\lambda-1}{2}k^2 + \cdots + \binom{\lambda-1}{\lambda-1}k^{\lambda-1} = 0.$$

En ser tots els termes no negatius, només s'anul·la l'expressió si tots són nuls. Tenim, doncs, que ha de ser $k = 1$ o bé $\lambda = 1$. Aquest darrer cas ens dóna el cas trivial $a = b$. Si $k = 1$ queda $a = 2$ i $2^{\lambda-1} = \lambda$ que només es compleix per $\lambda = 2$, d'on $b = 4$.
Si suposem que a i b són racionals amb $b > a$ podem posar

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{p}{q}$$

i la igualtat $a^b = b^a$ queda $a^{a(1+\frac{p}{q})} = \left(a(1+\frac{p}{q})\right)^a$ i substituint dóna lloc a

$$a = \left(1 + \frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}} \quad b = \left(1 + \frac{p}{q}\right)^{\frac{p+q}{p}}.$$

Per tal que a i b siguin racionals cal que tant q com $p+q$ siguin, simultàniament, arrels p-èsimes exactes. Però això és impossible si $p \neq 1$. En efecte, si q no és arrel exacta, ja hem acabat. Si ho és, serà $q = r^p$, $r > 1$. Queda

$$(r+1)^p = r^p + pr^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} r^{p-2} + \cdots ,$$

i com que $r^p = q$, $pr^{p-1} > p$ i els altres termes són no negatius, queda $(r+1)^p > p+q$, de forma que $p+q$ queda entre dues potències consecutives d'exponent p i no pot ser potència entera exacta. En conclusió, $p = 1$ i finalment

$$a = \Big(1 + \frac{1}{q}\Big)^q \quad b = \Big(1 + \frac{1}{q}\Big)^{q+1} .$$

Una simple comprovació demostra que aquests nombres compleixen l'equació.

Solució del problema AR15

Siguin $2, 3, \ldots , p_{\pi(n)}$ els nombres primers que són més petits o iguals que n. Qualsevol natural $m \le n$ el podrem escriure en la forma

$$m = m_1^2 \cdot 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdots p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}$$

on els a_i només poden prendre valors 0,1. Si donem valors 0,1 de totes les maneres possibles als a_i obtindrem tots els nombres més petits o iguals a n que són *lliures de quadrats*; el nombre total obtingut serà $2^{\pi(n)}$. Com que $m_1^2 \le m \le n$, serà $m_1 \le \sqrt{m} \le \sqrt{n}$. Si volem obtenir tots els nombres menors o iguals a n haurem de multiplicar els $2^{\pi(n)}$ lliures de quadrats per tots els m_1 que compleixin la condició $m_1 \le \sqrt{n}$. Per tant, el nombre total de nombres més petits o iguals que n , que és n, ha de complir $n \le \sqrt{n}\, 2^{\pi(n)}$. Fent operacions queda $\sqrt{n} \le 2^{\pi(n)}$ o bé, prenent logaritmes, $\log n \le \pi(n) \log 4$, i d'aquí el resultat.

Observació: Com que el logaritme tendeix a infinit, deduïm que $\pi(n)$ també ho fa, i demostrem altra vegada la infinitud dels primers. Però la fita inferior de l'enunciat és molt poc fina: per exemple, $\pi(1000) = 168$ i $\log 1000 / \log 4 = 4.983$.

Solució del problema AR25

Usarem la igualtat $2^{2^n} = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2$ i la identitat $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$. Procedirem per inducció sobre n. Per a $n=1$ no hi ha res a demostrar. Suposant-ho cert per a n, tenim

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 = \left(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right)$$

i com que el primer factor s'expressa, per hipòtesi d'inducció, com a producte de n primers com a mínim, i el segon en té un com a mínim, resulta que en total n'hi ha $n+1$ com a mínim.

ANÀLISI COMBINATÒRIA

Josep Pla i Carrera

Dos principis bàsics de càlcul d'elements de conjunts

El principi additiu [PA]
Suposem que dues experiències excloents E_1 i E_2 tenen respectivament n_1 i n_2 resultats possibles. L'experiència $E_1 \oplus E_2$ que consisteix en el fet que que s'hagi produït una d'ambdues experiències té $n_1 + n_2$ resultats possibles.
En termes conjuntistes diríem: tenim dos conjunts disjunts finits A_1, A_2, on $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Es tracta de calcular la quantitat d'elements —el *cardinal*— del conjunt $A_1 \cup A_2$, en el supòsit que coneixem els cardinals dels conjunts A_1 i A_2. El PA estableix que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|, \text{ sempre que } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

El principi multiplicatiu [PM]
Suposem que dues experiències E_1 i E_2 tenen, respectivament, n_1 i n_2 resultats possibles. Considerem l'experiència E formada per *totes* les *parelles ordenades* de resultats de les experiències E_1, E_2. L'experiència E consta de $n_1 \times n_2$ resultats possibles.
En termes conjuntistes diríem: tenim dos conjunts finits A_1 i A_2 tals que $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$. Considerem el *producte cartesià*

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

dels conjunts A_1 i A_2. El PM estableix que $|A_1 \times A_2| = n_1 \times n_2$.

Un principi bàsic del conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals [PI]

Els nombres naturals es caracteritzen per dos fets notables:

- Tenen un primer element 1.
- Cada element $n \in \mathbb{N}$ té un únic següent $n + 1$.

Però, a més, el conjunt $\mathbb{N}$ compleix el *principi d'inducció* [PI], que estableix el següent:

Sigui $A \subseteq \mathbb{N}$, no buit, tal que

(1) $1 \in A$, i

(2) per a cada $n \in A$, **podem provar** que $n+1 \in A$.

Aleshores $A = \mathbb{N}$.

Aquest principi el podem reescriure en els termes següents:

Sigui $P(n)$ una propietat relativa als nombres naturals tal que

(1) $P(1)$ és certa, i

(2) quan $P(n)$ és certa, **podem provar** que $P(n+1)$ també ho és.

Aleshores $P(n)$ és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

La hipòtesi que fem quan suposem que la propietat P és certa per a un valor n és la *hipòtesi d'inducció*.

Nota. A vegades el primer element de la inducció és zero. Aleshores cal suposar que $\mathbb{N}$ conté el zero. De vegades, la propietat $P(n)$ és certa a partir d'un cert valor n_0. En aquests casos, hem de provar que

(1) $P(n_0)$ és certa,

(2) per a cada $n > n_0$, si $P(n)$ és certa, aleshores $P(n+1)$ també.

Aquesta mena de principis permeten establir molts i molts resultats importants, i són unes eines indispensables en l'*anàlisi combinatòria*. Abans, però de ficar-nos de ple en aquesta mena de qüestions, donarem sis exemples il·lustratius.

Problema 1. Per anar de Barcelona a Hostalric podem fer-ho amb tren o bé amb autobús. Suposem que solament hi ha tres maneres d'anar-hi amb tren i dues amb autobús. De quantes maneres diferents és possible anar de Barcelona a Hostalric?
D'acord amb el PA, tenim que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5,$$

on A_1 és el conjunt d'itineraris de tren i A_2 és el conjunt d'itineraris d'autobús.

Problema 2. Hem d'anar d'Hostalric a Barcelona i, per obres, és necessari fer un tros amb tren i un tros amb autobús. Hi ha tres itineraris possibles de tren i dos d'autobús. Quantes maneres diferents tenim per arribar a Barcelona?
D'acord amb el PM: $|A_1 \times A_2| = 3 \cdot 2 = 6$.

Problema 3. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ són k conjunts disjunts dos a dos i $|A_i| = n_i, i = 1, \ldots, k$, aleshores

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1} \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + n_k.$$

D'acord amb el PI hem d'establir:

(1) La fórmula és vertadera per a $k = 2$, que és el PA.

(2) Suposem que, si $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k$ són k conjunts disjunts dos a dos i $|A_i| = n_i, i = 1, \ldots, k$, aleshores

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1} \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + n_k.$$

És a dir, suposem que la propietat $P(n)$ és certa per a $n = k$. Ara hem de demostrar que, si $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ són $k+1$ conjunts disjunts dos a dos i $|A_i| = n_i, i = 1, \ldots, k+1$, aleshores

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k + n_{k+1}.$$

Per provar-ho, fem $B_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ i $B_2 = A_{k+1}$. Els conjunts B_1, B_2 són disjunts:

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1} =$$

$$= (A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1}) = \emptyset,$$

atès que els conjunts $A_i, i = 1, \ldots, k, k+1$, són disjunts dos a dos.
Ara podem aplicar el PA als conjunts B_1 i B_2:

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = (n_1 + \cdots + n_k) + n_{k+1}.$$

Per a determinar el cardinal $|B_1|$ hem aplicat la *hipòtesi d'inducció*.

Problema 4. Quantes parelles ordenades (x, y) de nombres enters hi ha que compleixin la propietat $x^2 + y^2 \leq 5$?
Sigui $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$. Fem $A_i = \{(x, y) : x^2 + y^2 = i\}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Aleshores $A_0 = \{(0, 0)\}, A_1 = \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1).(0, -1)\}$, etc. Un cop ben caracteritzats els conjunts $A_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, calculem $|A_i|$. Llavors podem aplicar el PA, atès que $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, i que els conjunts $A_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$ són disjunts dos a dos. Per tant,

$$|A| = |A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21.$$

Problema 5. Trobeu tots els divisors positius possibles de 600, incloent-hi l'1 i el 600.

Sabem que $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Els seus divisors són de la forma

$$d = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k, \text{ on } 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1, 0 \leq k \leq 2.$$

Per tant hem de calcular $|D|$, on $D = \{d \in \mathbb{N} : d \,|\, 600\}$. Cal, doncs, trobar el nombre de ternes ordenades (i, j, k) que podem fer amb $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j \in \{0, 1\}$, $k \in \{0, 1, 2, \}$. Pel PM resulta que $|D| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Problema 6. Sabem que el valor Q_n de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$ dels quadrats dels n primers nombres naturals val $\dfrac{(2n+1)\, n\, (n+1)}{6}$.
Una manera de provar-ho és aplicant el principi d'inducció. D'entrada hem de calcular

$$Q_1 = 1^2 = 1 \text{ i } \frac{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1 \cdot (1+1)}{6} = 1.$$

Coincideixen.
Seguidament, suposem que $Q_n = 1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{(2n+1)\, n\, (n+1)}{6}$. És la hipòtesi d'inducció.
Ara hem de demostrar, basant-nos en la hipòtesi d'inducció, que

$$Q_{n+1} = \frac{(2\,(n+1)+1)\,(n+1)\,((n+1)+1)}{6}.$$

Però,

$$Q_{n+1} = Q_n + (n+1)^2 = \frac{(2n+1)\, n\, (n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Només cal fer els càlculs pertinents.

Figures combinatòries

Nombre de parts d'un conjunt A

Sigui A un conjunt amb m elements. El *nombre de parts* o de *subconjunts* de A, és a dir, el nombre d'elements del conjunt $\mathcal{P}(A)$, és 2^m. (*Indicació*: Recordem que $\emptyset$ i A són subconjunts del conjunt A.)

Permutacions de m elements

Una *permutació* de m objectes és el resultat de col·locar els m objectes en m llocs (o cel·les o també caselles) de manera que cada lloc contingui solament un objecte.

Tenim, doncs, m objectes $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ en m cel·les. A la primera cel·la n'hi podem col·locar m, a la segona, només $m-1$, atès que ja n'hi ha un a la primera cel·la i no el podem repetir, etc. Pel PM, resulta que el *nombre* $\mathbf{P}_m$ de permutacions de m objectes és

$$\mathbf{P}_m = m\,(m-1)\,\cdots\,2\cdot 1 = m!$$

Nota. $m!$ es llegeix *factorial* de m, o bé m *factorial*. Per conveni, $0! = 1$.

Fixem-nos que una *permutació* de m elements és una *filera* o *paraula* feta amb els m objectes sense repetir-ne cap.

Variacions de m elements presos de k en k

Suposem ara que tenim m objectes, però solament disposem de k cel·les, amb $k \leq m$. Cada una de les diferents maneres de col·locar k dels m objectes, sense repetir-ne cap, en les k cel·les és una *variació de m elements presos de k en k*. Dues variacions amb els mateixos objectes però col·locats de maneres diferents, són diferents.

Com abans, és clar que el *nombre* $\mathbf{V}_m^k$ de variacions de m elements presos de k en k és

$$\mathbf{V}_m^k = m\,(m-1)\,\cdots\,(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

És clar que $\mathbf{V}_m^m = \mathbf{P}_m$ i $\mathbf{V}_m^0 = 1$, atès que $0! = 1$.

Una *variació de m elements presos de k en k* és una *filera* o *paraula* feta amb k objectes diferents dels m de què disposem.

Combinacions de m elements presos de k en k

Una *combinació de m elements presos de k en k* és una tria de k elements dels m donats. És evident que ha de ser $k \leq m$.

Això fa que dues variacions de m objectes presos de k en k, amb els mateixos k elements, però col·locats de manera diferent, donin la mateixa combinació. I de variacions diferents que donen una mateixa combinació n'hi ha exactament $k!$. Per tant,

$$\mathbf{C}_m^k = \binom{m}{k} = \frac{1}{m!}\,\mathbf{V}_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Els nombres $\binom{m}{k}$ s'anomenen *nombres combinatoris* i tenen propietats molt notables. A tall d'exemple en posem algunes.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

El desenvolupament del *binomi de Newton* conté nombres combinatoris.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Podem escriure aquesta fórmula en forma abreujada

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

Variacions circulars relatives

Una *variació circular relativa de m objectes presos de k en k* és una col·locació arbitrària al voltant d'una taula rodona de k objectes triats d'entre m, tenint en compte que només cal fixar-se en la posició relativa del objectes entre ells, però no en relació a la taula.
Per veure-ho, suposem que $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ és un conjunt de $m = 4$ elements i que $k = 3$. Aleshores $\mathbf{V}_4^3 = 24$. Ara bé, aquestes vint-i-quatre variacions les podem dividir en 8 grups que són indistingibles per *rotació circular*.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta\delta$	$\alpha\gamma\delta$	$\beta\gamma\delta$	$\alpha\gamma\beta$	$\alpha\delta\beta$	$\alpha\delta\gamma$	$\beta\delta\gamma$
$\gamma\alpha\beta$	$\delta\alpha\beta$	$\delta\alpha\gamma$	$\delta\beta\gamma$	$\beta\alpha\gamma$	$\beta\alpha\delta$	$\gamma\alpha\delta$	$\gamma\beta\delta$
$\beta\gamma\alpha$	$\beta\delta\alpha$	$\gamma\delta\alpha$	$\gamma\delta\beta$	$\gamma\beta\alpha$	$\delta\beta\alpha$	$\delta\gamma\alpha$	$\delta\gamma\beta$

És a dir, cada tres variacions dels elements de A presos de tres en tres donen una mateixa variació circular. Per tant, $\mathbf{Q}_4^3 = \frac{1}{3}\mathbf{V}_4^3 = 8$.
En general, doncs: $\mathbf{Q}_m^k = \frac{1}{k}\,\mathbf{V}_m^k$.

Variacions amb repetició de m objectes presos de k en k

Ara, a diferència de les variacions introduïdes abans en les quals un cop col·locat un objecte en un lloc no era possible col·locar-lo en cap altre lloc, això ho podem fer. Cal, és clar, que disposem de prou còpies de cada objecte. Això fa que, a l'hora de col·locar l'objecte següent, estiguem en les *mateixes condicions* que abans de col·locar-lo. Hi ha independència de les accions efectuades.

Una *variació amb repetició de m objectes presos de k en k* s'obté quan es col·loquen k còpies d'alguns dels objectes d'un conjunt de m objectes diferents, en k cel·les de manera que cada cel·la només contingui un objecte.

És clar que el nombre $\mathbf{VR}_m^k$ de variacions amb repetició de m objectes presos de k en k és $\mathbf{VR}_m^k = m^k$.

Permutacions amb repetició de m objectes

Disposem de m objectes dels quals k són iguals entre si i $(m-k)$ també són iguals entre si. Si els permutem de totes les maneres possibles, tindrem $m!$ casos, però no pas *tots seran diferents*, atès que les permutacions entre si dels k objectes que són indistingibles dóna una mateixa permutació. Això fa que, de fet, només en poguem distingir, com a màxim, $\dfrac{m!}{k!}$. Ara bé, el mateix passa amb les permutacions dels $(m-k)$ objectes indistingibles. Per tant, en total

$$\mathbf{PR}_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \binom{m}{k} = \mathbf{C}_m^k.$$

En general, si tenim m objectes, però n'hi ha k_1 d'indistingibles, k_2 d'indistingibles, ... , k_r d'indistingibles, amb $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = m$, aleshores, quan els permutem, tenim les *permutacions amb repetició de m objectes amb $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de repetits*. El nombre $\mathbf{PR}_m^{k_1,\ldots,k_r}$ de *permutacions amb repetició de m objectes amb $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de repetits* és:

$$\mathbf{PR}_m^{k_1,\ldots,k_r} = \frac{m!}{k_1!\,\cdots\,k_r!}.$$

Combinacions amb repetició de m objectes

Donats m objectes dels quals en tenim tantes còpies com faci falta, una *combinació amb repetició de m objectes presos de k en k* és qualsevol tria de k còpies d'entre els m tipus d'objectes diferents.

Per tal de calcular el nombre $\mathbf{CR}_m^k$ analitzarem un cas particular. Tenim una pila d'objectes de 4 tipus. Cada objecte pot ser de tipus $1, 2, 3, 4$ i en volem triar 3. En aquest cas, $m = 4, k = 3$. Per representar cada tria disposem de *quatre cel·les* o *caselles* separades entre elles per una paret i numerades de 1 a 4, i 3 boles iguals. Col·loquem a cada cel·la tantes boles com objectes d'aquell tipus hi hagi a la tria feta. És a dir,

tries		cel·les 1	2	3	4		representació
111	$\rightarrow$	•••				$\rightarrow$	$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \mid\ \mid\ \mid$
112	$\rightarrow$	••	•			$\rightarrow$	$\bullet\ \bullet\ \mid\ \bullet\ \mid\ \mid$
113	$\rightarrow$	••		•		$\rightarrow$	$\bullet\ \bullet\ \mid\ \mid\ \bullet\ \mid$
114	$\rightarrow$	••			•	$\rightarrow$	$\bullet\ \bullet\ \mid\ \mid\ \mid\ \bullet$
122	$\rightarrow$	•	••			$\rightarrow$	$\bullet\ \mid\ \bullet\ \bullet\ \mid\ \mid$
123	$\rightarrow$	•	•	•		$\rightarrow$	$\bullet\ \mid\ \bullet\ \mid\ \bullet\ \mid$
124	$\rightarrow$	•	•		•	$\rightarrow$	$\bullet\ \mid\ \bullet\ \mid\ \mid\ \bullet$
133	$\rightarrow$	•		••		$\rightarrow$	$\bullet\ \mid\ \mid\ \bullet\ \bullet\ \mid$
134	$\rightarrow$	•		•	•	$\rightarrow$	$\bullet\ \mid\ \mid\ \bullet\ \mid\ \bullet$
144	$\rightarrow$	•			••	$\rightarrow$	$\bullet\ \mid\ \mid\ \mid\ \bullet\ \bullet$
222	$\rightarrow$		•••			$\rightarrow$	$\mid\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \mid\ \mid$
223	$\rightarrow$		••	•		$\rightarrow$	$\mid\ \bullet\ \bullet\ \mid\ \bullet\ \mid$
224	$\rightarrow$		••		•	$\rightarrow$	$\mid\ \bullet\ \bullet\ \mid\ \mid\ \bullet$
233	$\rightarrow$		•	••		$\rightarrow$	$\mid\ \bullet\ \mid\ \bullet\ \bullet\ \mid$
234	$\rightarrow$		•	•	•	$\rightarrow$	$\mid\ \bullet\ \mid\ \bullet\ \mid\ \bullet$
244	$\rightarrow$		•		••	$\rightarrow$	$\mid\ \bullet\ \mid\ \mid\ \bullet\ \bullet$
333	$\rightarrow$			•••		$\rightarrow$	$\mid\ \mid\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \mid$
334	$\rightarrow$			••	•	$\rightarrow$	$\mid\ \mid\ \bullet\ \bullet\ \mid\ \bullet$
344	$\rightarrow$			•	••	$\rightarrow$	$\mid\ \mid\ \bullet\ \mid\ \bullet\ \bullet$
444	$\rightarrow$				•••	$\rightarrow$	$\mid\ \mid\ \mid\ \bullet\ \bullet\ \bullet$

Tal com indica la darrera columna de la taula, podem identificar cada tria amb una seqüència de tres boles i tres barres, corresponents a les boles i als separadors, i fet de totes les maneres possibles; i d'aquestes n'hi ha tantes com les permutacions amb repetició de 6 elements amb 3 i 3 repetits. És a dir,

$$\mathbf{CR}_4^3 = \mathbf{PR}_{(4-1)+3}^3 = \mathbf{C}_6^3 = \binom{6}{3}.$$

En general, tindrem un conjunt prou gran d'objectes, cada un de tipus de 1 a m i n'haurem de triar k; seguint amb l'exemple anterior, necessitaríem m cel·les (per tant, amb $m-1$ separadors) per a col·locar-hi k boles, posant a cada cel·la tantes boles com objectes d'aquell tipus hi hagi a la tria. D'aquesta manera podem identificar cada tria amb una successió de k boles i $m-1$ separadors. Per tant,

$$\mathbf{CR}_m^k = \mathbf{PR}_{m+k-1}^k = \mathbf{C}_{m-1+k}^k = \binom{m+k-1}{k}.$$

Distribucions de k objectes diferents *en n capses* diferents

(1) Cada capsa pot contenir, *com a màxim, un* objecte. Aleshores ha de ser $k \leq n$. Com que tots els objectes s'han de col·locar, el nombre de maneres de distribuir-los és el de variacions de n caixes preses de k en k, és a dir, $\mathbf{V}_n^k$.
(2) Cada capsa pot contenir *qualsevol nombre* d'objectes. Aleshores el nombre de maneres de distribuir-los és el de variacions amb repetició de n capses preses de k en k, és a dir, $\mathbf{VR}_n^k$.
(3) Cada capsa pot contenir qualsevol nombre d'objectes, però l'ordre dins de cada capsa és rellevant. Aleshores el nombre de casos és $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!}$.

Distribucions de k objectes idèntics *en n capses* diferents
(1) Si cada capsa pot contenir, *com a màxim, un* objecte, aleshores ha de ser $k \leq n$ i el nombre de maneres de distribuir-los és el de combinacions de n capses preses de k en k, és a dir, $\binom{n}{k}$.
(2) Si cada capsa pot contenir qualsevol nombre d'objectes, aleshores el nombre de maneres de distribuir-los és el de combinacions amb repetició de n capses preses de k en k, és a dir $\mathbf{CR}_n^k$.

Problemes

AC1. Sigui $N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, on $p_1, p_2, \ldots, p_r$ són nombres primers, i D el conjunt dels divisors positius de N. Llavors $|D| = (k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1)$.
(És un simple exercici d'aplicació del principi multiplicatiu).

AC2. Proveu, per inducció, que el nombre de subconjunts d'un conjunt A, de cardinal m, inclosos el conjunt buit i A, té cardinal 2^m.

AC3. Proveu, per inducció, que si un conjunt A té m elements, el conjunt d'aplicacions de A en el conjunt $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, en té 2^m.
Sabríeu provar-ho d'una altra manera?

AC4. Useu el PM per provar que el nombre de tirallongues de n nombres naturals agafats del conjunt $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ és igual a k^n.

AC5. El menú turístic d'un restaurant és:

Elegiu un dels entrants:

Sopa, Suc de fruita, Cocktail de marisc.

Elegiu un dels següents plats de vianda:

Bistec
Roast Beaf
Pollastre rostit
Mandonguilles amb espaguetti

Elegiu un dels següents acompanyaments:

Patates fregides
Tomàquet a la grega
Pèsols saltejats

Elegiu una d'aquestes postres:

Fruita, Gelat, Formatge.

Elegiu:

Café o Té.

Quants menjars diferents hi pot fer un turista? Quin dia podrà tornar a casa seva si el primer dinar el fa el 28 de febrer de 1993, suposant que els vol tastar tots i només hi dina?

AC6. Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

AC7. Considerem totes les $\mathbf{VR}_4^2$ del conjunt $\{1, 2, 3, 4\}$ i totes les $\mathbf{V}_4^2$. Quants elements cal eliminar de les primeres per tal d'aconseguir $\mathbf{CR}_4^2$? I quines hem d'eliminar de les segones per obtenir $\mathbf{C}_4^2$?

AC8. (i)Quatre persones volen jugar simultàniament partits individuals de tennis i disposen de dues pistes. De quantes maneres podem distribuir-los, si no tenim en compte l'elecció de pista? De quantes maneres, si es té en compte la pista on juga cada parella?
(ii) De quantes maneres podem situar m persones en r llocs diferents si volem que $m_1, m_2, \ldots, m_r$ es col·loquin respectivament al lloc $1, 2, \ldots, r$? $(m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m)$.

AC9. Sis muntanyencs s'han de dividir en 3 grups de dos cada un per tal de fer l'assalt final. De quantes maneres poden fer-ho? I si els grups consten d'1, 2 i 3 persones?
Si ara cal ordenar-los en primer, segon i tercer grup d'assalt, de quantes maneres ho podrem fer?

AC10. Proveu que

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n};$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}.$$

AC11. Proveu que

$$\binom{m}{n} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \binom{m-k}{n-j}$$

i calculeu $\binom{7}{3}$ i $\binom{7}{5}$ fent servir el triangle aritmètic fins a la fila 5.

AC12. De quantes maneres podem posar n boles en n capses numerades de forma que quedi buida exactament una capsa? (*Indicació*: Separeu el cas distingible del cas indistingible.)

AC13. Una noia vol regalar al seu xicot una camisa o una corbata pel seu aniversari. Però solament pot triar entre 3 camises i 2 corbates. Quantes tries diferents pot fer? I si vol comprar alhora una camisa i una corbata?

AC14. En una botiga hi ha tres menes de camises per vendre
(a) Si dos homes compren una camisa cada un, de quantes maneres diferents poden fer-ho?
(b) Si un home compra dues camises, de quantes maneres pot triar-les?

AC15. Quantes inicials diferents podem fer amb dues o tres lletres de l'alfabet? Quantes lletres hauria de tenir un alfabet per tal que un milió de persones diferents es pogués identificar amb inicials de dues o tres lletres?

AC16. De quantes maneres es poden aparellar 4 nois i 4 noies? De quantes maneres es poden col·locar en una fila de manera que s'alternin persones de sexe diferent?

AC17. De quantes maneres podem triar un comitè de tres persones d'un grup de 20? I de quantes si cal que una sigui el president, l'altre el vicepresident i la tercera secretari?

AC18. Si tenim dues monedes de 50 pta, dues de 25 pta i tres duros, quantes sumes diferents podem aconseguir? Si canviem una de les monedes de 25 pta en duros, quantes sumes diferents podrem aconseguir?

AC19. Deu llibres es col·loquen en dues piles. De quantes maneres podem fer-ho si els llibres són indistingibles? I si són distingibles? I si les piles són distingibles o indistingibles? Analitzeu els 4 casos.

AC20. Repartim deu llibres diferents entre en Daniel, en Felip, en Pau i en Joan de manera que s'enduen respectivament lots de 3, 3, 2 i 2 llibres. De quantes maneres podem fer-ho?
En Pau i en Joan no estan d'acord amb aquest repartiment i es decideix repartir els lots entre ells de manera que cada un tingui un lot. De quantes maneres podem fer ara el repartiment? Ara la Maria i la Cori volen també tenir dret a aconseguir llibres. Es decideix repartir els lots entre tots sis de forma que hi haurà dues persones que no obtindran cap lot. De quantes maneres podem fer això?

AC21. Considereu el conjunt $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ i sigui

$$S = \{(a, b, c) : a, b, c \in A, a < b \text{ i } a < c\}.$$

Trobeu $|S|$.

AC22. Proveu, per inducció, que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$. Sabríeu demostrar-ho d'alguna altra manera?

AC23. Trobeu les identitats que expressen, en funció de n, els valors de
(a) $1+2+\cdots+n$, (b) $1^2+2^2+\cdots+n^2$, i (c) $1^3+2^3+\cdots+n^3$.
Fixeu-vos en la diferència que hi ha entre trobar una expressió i provar-ne la validesa, un cop trobada.

AC24. De quantes maneres podem fer la tria d'una parella $\{a,b\}$ de nombres diferents del conjunt $A=\{1,2,\ldots,50\}$, si volem que
(a) $|a-b|=5$,
(b) $|a-b|\leq 5$.

AC25. *Principi additiu general* [PAG]: Si A,B són dos conjunts finits, aleshores $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. Proveu-ho.

AC26. Proveu que el nombre de *bijeccions* que podem fer entre el conjunt $\mathbf{m}=\{1,2,\ldots,m\}$ i un conjunt A amb m elements coincideix amb el nombre de permutacions de m elements.

AC27. Suposem que volem col·locar m objectes en m cadires que es troben al voltant d'una taula rodona i que les cadires estan numerades amb els números $1,2,\ldots,m-1,m$. Proveu que les maneres de fer-ho és $m!$.*Nota:* Les cadires són distingibles.
Què passaria, si les cadires no fossin distingibles?

AC28. Siguin A,B dos conjunts i suposem que $|A|=k, |B|=m, k\leq m$. Quantes *injeccions* podem fer de A en B?

AC29. (a) Tenim 4 fitxes marcades amb les lletres a,b,c,d. Quantes paraules de tres lletres podem fer?
(b) Quantes paraules de tres lletres podem fer amb les lletres a,b,c,d?
(c) Tenim 9 fitxes numerades de l'1 al 9. Quants nombres de 4 xifres podem fer?
(d) Quants nombres de 4 xifres podem fer usant només els nombres $1,2,3,4,5,6,7,8,9$?

AC30. Sigui $A=\{a,b,c,\ldots,x,y,z\}$ el conjunt de les 26 lletres de l'alfabet català. Quin és el nombre de paraules de 5 lletres que podem fer amb les lletres de A, si volem que la primera i la darrera siguin vocals i les altres tres consonants?

AC31. En una festa hi ha 7 nois i 3 noies. De quantes maneres podem posar-los en fila, si volem que
(a) les noies formin un bloc, (b) les dues posicions finals estiguin ocupades per nois i que cap noia no estigui al costat d'una altra noia?

AC32. Entre 20.000 i 70.000, quants nombres parells hi ha que no tinguin cap dígit repetit?

AC33. Sigui A el conjunt dels nombres naturals els dígits dels quals són $\{1,3,5,7\}$ sense que n'hi hagi cap de repetit. Calculeu:
(a) el cardinal del conjunt A;
(b) el nombre $S = \sum_{m\in A} m$.

AC34. (a) Proveu que tot nombre combinatori és un nombre natural. Sabríeu demostrar-ho per inducció?
(b) Proveu que, si p és un nombre primer i $1 \leq k < p$, aleshores $\binom{p}{k}$ és un múltiple de p.
(c) Què passa quan p no és un nombre primer? [*Indicació*: Feu unes quantes fileres del *triangle aritmètic*.]

AC35. Proveu que $\binom{m}{k}$ és el nombre de subconjunts de k elements d'un conjunt A de m elements. Deduïu-ne que

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m.$$

AC36. Fem tirallongues de 0 i 1 de llargada 7. Quantes n'hi ha que tinguin 3 zeros i 4 uns? Deduïu-ne que $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.

AC37. De quantes maneres podem fer un comitè de 5 persones d'un col·lectiu de 11 de les quals 4 són noies i 7 són nois, si volem que
(a) el comitè tingui exactament dues noies?
(b) el comitè tingui almenys 3 noies?
(c) el comitè contingui una noia i un noi concrets?

AC38. (a) De quantes maneres diferents podem formar tres equips de futbol amb 33 nois?
(b) Si $|A| = 2n, n \geq 1$, quantes parelles d'elements de A podem fer?
(c) Generalitzeu aquest problema. Proveu que el nombre de k-agrupacions diferents d'elements de A, amb $|A| = n\,k$ és precisament $\dfrac{(n\,k)!}{n!\,(k!)^n}$.

Mostra de solucions

Solució del problema AC14

Suposem que dos homes compren una camisa cada un. El primer home pot comprar una camisa d'un dels tres tipus que hi ha. El segon home també. Per tant hi ha $3 \times 3 = 9$ maneres de fer-ho. També es pot interpretar que es tracta de $\mathbf{VR}_3^2$.
Si un home compra dues camises, l'ordre com les tria no és rellevant per al resultat final de la compra. Com que els tipus de camises es poden repetir, tindrem $\mathbf{CR}_3^2 = \binom{3+2-1}{2} = 6$ maneres de fer-ho.

Solució del problema AC18

És un problema de comptes de la vella, és a dir, cal comptar sense equivocar-se ni deixar-se cap cas, ni repetir-ne cap.

D (duros)	$D+25$	$D+2\cdot 25$ $(D+50)$	$D+25+50$	$D+2\cdot 25+50$ $(D+2\cdot 50)$	$D+2\cdot 50$ +25	$D+2\cdot 50$ $+2\cdot 25$
	25	50	75	100	125	150
5	30	55	80	105	130	155
10	35	60	85	110	135	160
15	40	65	90	115	140	165.

L'altre cas es deixa per al lector.

Solució del problema AC19

a) Llibres indistingibles i piles distingibles. Els deu llibres es poden col·locar a les piles en les formes $(0,10)$, $(1,9)$, … $(9,1)$ i $(10,0)$. En total hi ha 11 maneres de fer-ho.
b) Llibres indistingibles i piles indistingibles. Les piles dels cas anterior $(0,10)$ i $(10,0)$ són indistingibles. També ho són les $(1,9)$ i $(9,1)$, etc. fins a les $(4,6)$ i $(6,4)$. L'apilament $(5,5)$ no té parella. En total els apilaments es poden fer de 6 maneres.

c) Llibres distingibles i piles distingibles. Primer permutem els llibres de totes les maneres possibles, que seran $10!$. Fixada una permutació concreta dels llibres, apilem-los tal com hem fet al cas a). Tindrem en total $11 \times 10!$ maneres en total.
d) Llibres distingibles i piles indistingibles. Es raona com al cas anterior formant les $10!$ permutacions de llibres, i apilant-los després segons b). En total hi haurà $6 \times 10!$ casos.

Solució del problema AC30

A l'alfabet de 26 lletres hi ha 5 vocals i 21 consonants. Podem fixar les vocals de $\mathbf{VR}_5^2 = 5^2$ maneres diferents, i les consonants de $\mathbf{VR}_{21}^3 = 21^3$ maneres diferents. En total tindrem $5^2\,21^3$ paraules.

Solució del problema AC31

a) Considerem les tres noies com un bloc. Les noies, en aquest bloc, poden col·locar-se de $3!$ maneres diferents. Si marquem amb números les posicions dels nois, i amb $\bullet$ els llocs inicial, final i intermedis, tindrem

$$\bullet 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7 \bullet$$

i el bloc de noies ha d'ocupar una de les posicions marcades per $\bullet$. En total tindrem, doncs, $8 \times 3!\,7!$ col·locacions possibles.
b) Si marquem, com abans, les posicions dels nois amb números, *cada una* de les noies pot ocupar una posició $\bullet$ a

$$1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7$$

i haurem de triar 3 $\bullet$ d'entre els 6 que hi ha. Com que les noies es poden permutar i els nois també, tindrem $\mathbf{C}_6^3\mathbf{P}_3\mathbf{P}_7 = \mathbf{V}_6^3\mathbf{P}_7$ possibilitats.

EL PRINCIPI DE LES CASELLES

Josep Pla i Carrera

El principi de Dirichlet

La idea del principi és molt senzilla: si hem de col·locar tres coloms en dues caselles, necessàriament dos coloms han de compartir una mateixa casella.

El principi de les caselles (o del colomar) [PC]

Enunciat 1:

Siguin k i n dos enters positius. Si almenys $k\,n+1$ objectes es distribueixen entre n compartiments, aleshores almenys un dels compartiments contindrà $k+1$ objectes.

Enunciat 2:

Si N objectes s'han de distribuir entre k cel·les o caselles, aleshores una almenys de les cel·les conté un nombre d'objectes que és més gran o igual que $\left[\dfrac{N}{k}\right]+1$, en el cas que k no divideixi N. Si k divideix N, el nombre d'objectes és més gran o igual que $\dfrac{N}{k}$.
En particular, si $n+1$ objectes es reparteixen entre n cel·les o caselles, aleshores una almenys conté dos objectes.

Aquest principi es coneix també amb el nom de *principi de Dirichlet* [Dirichlet, P. G. Lejeune [1805–1859]]. En anglès es parla habitualment del *drawer principle* o, molt més sovint, del *pigeon-hole principle*, on el mot "pigeon-hole" equival a una casella d'un moble subdividit en cel·les per tal de col·locar-hi cartes, documents o altres objectes, i classificar-los (en castellà, "casillero"). Però l'ús reiterat porta a parlar de "pigeons i de "holes" separadament, fent-los servir com a primer exemple del principi. Tot això condueix a la denominació pintoresca de "colomar".

Problema 1. *Quantes persones cal reunir per tal d'assegurar que n'hi ha dues que tenen nom amb la mateixa inicial?*
El conjunt de "caselles" és el conjunt de lletres de l'alfabet, suposem que són 26. Si tenim 27 persones i les "col·loquem" a les caselles, n'hi ha dues a la mateixa, i per tant tenen el nom amb la mateixa inicial. Si només hi hagués 26 persones, podria donar-se el cas que totes tinguessin inicials diferents.

Problema 2. *Quantes persones cal reunir per tal d'assegurar que n'hi ha sis que tenen nom amb la mateixa inicial?*
El conjunt de "caselles" és com abans el conjunt de les 26 lletres de l'alfabet. Si tenim $26 \times 5 + 1 = 131$ persones podem assegurar que al menys 6 d'elles tenen la mateixa inicial. Amb només 130 persones això no es podria assegurar, ja que podria haver-n'hi 5 de cada lletra.

Problema 3. *En una classe hi ha estudiants dels dos sexes, de tres pobles i que practiquen cinc esports. Quants n'hem de reunir per tal d'assegurar que n'hi ha dos del mateix sexe, del mateix poble i que practiquen el mateix esport?*
Assignem a cada estudiant una terna xyz on x pot ser H home o D dona, y pot ser P_1, P_2, P_3, segons el poble d'origen, i z pot ser E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, segons l'esport practicat. El conjunt de *totes les ternes possibles* té $2 \times 3 \times 5 = 30$ elements. Si tenim 31 estudiants, és segur que n'hi ha 2 als quals els correspon la mateixa terna, és a dir, són del mateix sexe, del mateix poble i practiquen el mateix esport. Si només tinguéssim 30 estudiants, *podria donar-se el cas* que tots tinguessin ternes diferents, i dos a dos tindrien sempre algun atribut diferent.

Observació: Malgrat la seva aparença trivial, el principi de les caselles és un instrument molt potent per a demostrar, sota condicions que només afecten el nombre d'elements, l'*existència* de certs elements d'un conjunt que comparteixen les mateixes propietats.

Problemes

PC1. Proveu el principi del colomar.

PC2. Demostreu que entre els individus d'un grup de set persones, almenys n'hi ha quatre del mateix sexe.

PC3. Entre els individus d'un grup de 3000 persones, sempre n'hi ha 9 que tenen el mateix dia d'aniversari.

PC4. Entre els individus d'un grup de 2 o més persones, sempre n'hi ha dues amb el mateix nombre d'amics dins del grup . (Suposem que tot individu és sempre amic d'ell mateix i que l'amistat és una relació simètrica.)

PC5. Proveu que en tota elecció de 10 punts elegits en un quadrat de 3 unitats de costat, sempre hi ha 2 punts que disten com a màxim $\sqrt{2}$.

Nota. En aquest problema hom pot veure la importància en l'elecció de les cel·les. Si, per exemple, haguéssim elegit rectangles $\frac{1}{3} \times 3$, no hauríem pogut concloure allò que se'ns demanava.

PC6. Deu jugadors formen part d'un campionat d'escacs de tots contra tots; és a dir, cada jugador ha de jugar un joc amb cada un dels altres. Un jugador s'anota $+1$, quan guanya, 0, quan fa taules, i -1, quan perd. Quan el torneig s'acaba resulta que el 70 % dels jocs han estat taules. Proveu que hi ha dos jugadors amb el mateix nombres de punts.

PC7. *Olimpíada d'Israel, 1988*. Un grup de persones visita una exposició de 100 quadres. Cap no arriba a veure tots els quadres, però tots els quadres han estat vistos per algun dels visitants. Proveu que hi ha una parella de visitants (v_1, v_2) i una parella de quadres (α, β) tals que v_1 ha vist α però no ha vist β i v_2 ha vist β però no ha vist α.

PC8. *Putnam Competitions, 1953*. Distribuïm sis punts a l'espai sense que n'hi hagi tres d'alineats ni tampoc quatre de coplanaris. Ara tracem segments, en total quinze, que els uneixin dos a dos. Alguns els pintem de color blau i els altres de color vermell. Proveu que hi ha almenys un triangle que té tots els costats del mateix color.

Nota. Amb cinc vèrtexs no és possible de garantir un triangle del mateix color. Busqueu un contraexemple.

PC9. [*American Mathematical Monthly*, **65** (1958), 446, i resolt a **66** (1959), 141–142.] En una reunió de sis persones sempre n'hi ha tres que es coneixen mútuament o que es desconeixen totalment. Demostreu-ho.

PC10. *Olimpíada Matemàtica Internacional, 1964/4.* Disset persones s'escriuen entre elles, cada una amb totes les altres. En les cartes només tracten tres temes. Cada parella de corresponsals, però, només tracta un dels temes. Proveu que almenys n'hi ha tres que escriuen sobre el mateix tema.

PC11. Donat un conjunt de 10 enters positius diferents i menors que 107, demostreu que hi ha dos subconjunts disjunts que tenen la mateixa suma.

PC12. Les persones d'una reunió han fet encaixades de mans en arribar. Suposem que ningú es dóna la mà a ell mateix i cap parella de persones s'ha donat la mà més d'una vegada. Demostreu que hi ha dues persones a la reunió que han encaixat el mateix nombre de mans.

PC13. En un disc de radi 1 hi posem 8 punts (a l'interior o sobre la circumferència). Demostreu que n'hi ha dos que estan a distància estrictament inferior a la unitat.

PC14. Donat un conjunt de n enters positius qualssevol, hi ha un subconjunt tal que la suma dels seus elements és divisible per n. Demostreu-ho.

PC15. *P. Erdös.* Demostreu que donada una successió de més de $(r-1)(s-1)$ nombres diferents, hi ha una subsuccessió creixent de r termes, o hi ha una subsuccessió decreixent de s termes.

PC16. Suposem que el nombre màxim de llibres que pot tenir una persona és 50000. Demostreu que a Barcelona hi ha dues persones que tenen el mateix nombre de llibres.
El nombre màxim de cabells per mm^2 és 5. Demostreu que a Espanya hi ha dues persones amb el mateix nombre de cabells.

PC17. Cada dia posem a una guardiola una moneda de 1 pta o una moneda de 2 pta i el total que tenim al cap de n dies és de m pta. Demostreu que per cada enter $0 \leq k \leq 2n-m$ hi ha un conjunt de dies consecutius durant els quals el contingut de la guardiola s'ha incrementat en k pta.

PC18. Proveu que d'entre 5 punts d'un triangle equilàter de costat unitat, n'hi ha sempre dos que disten com a màxim $1/2$.

PC19. Donat un conjunt C de $n+1$ punts diferents ($n \in \mathbb{N}$) sobre la circumferència d'un cercle de radi unitat, proveu que hi ha dos punts $a, b \in C, a \neq b$, tals que la distància entre ells no excedeix mai $2 \sin \dfrac{\pi}{n}$.

PC20. *Competició matemàtica de Beijing, 1963.* Donat un conjunt S de 9 punts d'un quadrat de costat 1, proveu que sempre hi ha tres punts de S tals que l'àrea del triangle format per ells és més petita o igual que $1/8$.

PC21. Donats n nombres enters, aleshores o bé un d'ells és múltiple de n, o bé se'n poden sumar diversos per tal d'obtenir un múltiple de n. Proveu-ho.

PC22. *Paul Erdös. A.M.M., 1937.* Donats $n+1$ enters $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, cada un d'ells més petit o igual que $2n$, demostreu que almenys un d'ells és divisible per algun altre del conjunt.

PC23. Proveu que en tot conjunt de 5 nombres, hi ha sempre tres nombres la suma dels quals és divisible per 3.

PC24. Sigui A un conjunt de $n+1$ elements, on $A \subset N$. Proveu que existeixen $a, b \in A$ tals que $n|(b-a)$.

PC25. Sigui $A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ tal que $|A| = n+1$. Demostreu que aleshores conté dos nombres que són primers entre ells.

PC26. Sigui $C = \{r_1, \dots, r_{n+1}\}$ un conjunt format per $n+1$ nombres reals tal que $0 \leq r_i < 1$. Proveu que hi ha almenys dos elements $r_i, r_j \in C$ tals que $|r_i - r_j| < \dfrac{1}{n}$.

PC27. Sigui $n \geq 3$ un nombre senar. Proveu que hi ha un nombre divisible per n en el conjunt

$$\{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}.$$

PC28. Sigui A un conjunt de 20 nombres enters diferents de la progressió aritmètica $1, 4, 7, \ldots, 100$. Demostreu que el conjunt A conté dos enters diferents la suma dels quals és 104.

Mostra de solucions

Solució del problema PC4

El nombre d'amics t_k de l'individu k del grup pot prendre valors en un dels dos conjunts $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ o $\{2, \ldots, n\}$, ja que 1 i n no hi poden ser simultàniament (si un individu només és amic d'ell mateix, per la simetria, no pot haver-hi una altre individu que sigui amic de tots). En qualsevol dels dos casos prenem com a caselles els elements d'un dels conjunts anteriors i hi ha com a màxim $n-1$ caselles. Per tant almenys dues persones, i, j han de tenir el t_i i el t_j a la mateixa casella, d'on $t_i = t_j$, i tenen el mateix nombre d'amics.

Solució del problema PC11

Els possibles valors de les sumes dels conjunts de 0 a 10 elements van de 0 fins a $97 + 98 + \cdots + 106 = 1015$. Sigui ara A un conjunt de 10 elements enters positius i menors que 107. El conjunt A té $2^{10} = 1024$ parts. Posant les sumes de totes les possibles parts a les caselles dels possibles valors, que són 1016, resulta que per força hi ha dues parts que tenen la mateixa suma, diguem A_1 i A_2. Si aquests dos subconjunts són disjunts, ja hem acabat. Si no ho són, podem treure de tots dos $A_1 \cap A_2$ i obtindrem dues altres parts de A disjuntes i de la mateixa suma.

Solució del problema PC16

Transcripció literal del llibre de P. Puig Adam, *Curso de GEOMETRIA METRICA*, Tomo I – Fundamentos, Introducción (Experiencia, intuición y lógica en la génesis de la Ciencia):

"Numerosísimos son los ejemplos y curiosidades que muestran la insufuciencia o los engaños de la intuición. Por su brevedad y elementalidad nos contentaremos con los dos siguientes:

1.– Supongamos que un interlocutor de mediana cultura, que sepa que España tiene más de 20 millones de habitantes y que nuestro cuero cabelludo tiene bastantes menos de 5 cabellos por mm^2; y preguntémosle si es seguro que existen dos españoles con el mismo número de cabellos.

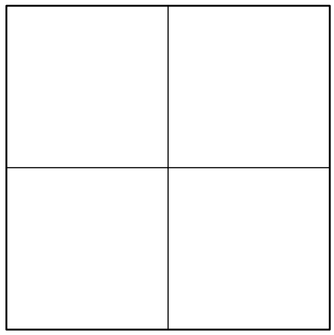
La imposibilidad de imaginar la experiencia comparativa le hará sin duda declarar al pronto

que la pregunta no tiene contestación posible.
Sin embargo, un sencillísimo razonamiento permite llegar donde la intuición no llega, y contestar afirmativamente; pues si todos los españoles tuviesen distinto número de cabellos, habría alguno con más de 20 millones de cabellos, para lo cual necesitaría una superficie de cabeza mayor de 4 metros cuadrados."

2.– . . . "

Solució del problema PC20

Dividim el quadrat en quatre parts, tal com indica la figura. Cada part té àrea 1/4. Si tenim 9 punts al quadrat, com que hi ha 4 caselles, pel principi de Dirichlet, segur que hi ha 3 punts en una casella, és a dir, en un mateix quadrat petit. Aquests 3 punts formen un triangle dins d'un quadrat d'àrea 1/4, i per tant l'àrea d'aquest triangle ha de ser menor o igual que 1/8, ja que el triangle d'àrea màxima dins d'un quadrat és el format per dos costats i la diagonal i té àrea la meitat de la del quadrat.



PROBABILITAT

Josep Pla i Carrera

Primera aproximació a la probabilitat

Considerem un fenomen que té un nombre finit de resultats possibles $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. El conjunt S s'anomena *espai mostral*.
Suposem que cada resultat possible a_i té associat un nombre real p_i tal que

$$0 \leq p_i \leq 1$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$$

El conjunt de valors p_i és una *valoració probabilística* de l'espai mostral.
Un *succés* A està format per un cert nombre r de resultats possibles de l'espai mostral S:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}.$$

Direm que la *probabilitat* $P(A)$ *del succés* A és el valor

$$P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_r}.$$

Un fenomen és *equiprobable* quan $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$. Aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}.$$

PR1. Proveu que
(a) $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.
(b$'$) En general, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$, si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.
(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(d$'$) Generalitzeu (d) a tres, quatre, etc m successos.
(e) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, on $\overline{A}$ indica l'esdeveniment contrari de A.
(f) Si $A \subseteq B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

PR2. Aquest problema suggereix la definició general de probabilitat P en un espai mostral S. És una aplicació dels subconjunts de S en $\mathbb{R}$ que compleixi les tres propietats:
(a) Per a cada $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.
(c) $P(S) = 1$.
Podeu veure que aleshores es compleixen les propietats (b$'$), (d), (d$'$), (e) i (f) del problema anterior.
Aquesta definició permet de generalitzar el cas *discret* al cas general en el qual S pot ser un conjunt infinit numerable o no numerable. L'únic que cal tenir en compte és que la probabilitat P ha d'estar definida en una família $\mathcal{A}$ de subconjunts d'S tancada per unió i per pas al complementari. Cal, a més, que $S \in \mathcal{A}$.
Un exemple concret ens el proporcionen els subconjunts d'un conjunt geomètric S que sigui una superfície o un sòlid. Aleshores, si $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{\text{àrea d'}(A)}{\text{àrea d'}(S)} \qquad \text{o} \qquad P(A) = \frac{\text{volum d'}(A)}{\text{volum d'}(S)}.$$

Probabilitat condicionada i independència

Considerem el següent exemple: d'un lot de 100 productes amb 80 sense defectes i 20 amb defectes n'agafem dos i ho fem (a) amb substitució, (b) sense substitució.
Considerem ara els següents successos

$$A = \{\text{el primer article és defectuós}\}$$
$$B = \{\text{el segon article és defectuós}\}$$

En el primer cas $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. En el segon cas, $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Però quin és ara el valor de $P(B)$? És clar que ara, en el cas (b), el valor que pren $P(B)$ depèn del que hagi passat amb el succés A, ja que el comportament de la mostra varia segons que

s'hagi esdevingut A o no. Aleshores indicarem $P(B|A)$ la probabilitat del succés B en el ben entès que el succés A ha succeït prèviament.
En l'exemple que estem comentant és clar que $P(B|A) = \frac{19}{99}$. (En realitat l'espai mostral ha canviat i els successos estan condicionats a A.)
Formalment definim la *probabilitat condicional* per l'expressió

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple. Llancem dos daus i anotem els resultats $\langle x_1, x_2 \rangle$, on x_i designa el resultat de l'i-èsim dau ($i = 1, 2$). Considerem els successos

$$A = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10\} \qquad \text{i} \qquad B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 < x_2\}.$$

Ara podem considerar el succés

$$A \cap B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10, x_1 < x_2\} = \{\langle 4, 6 \rangle\}.$$

D'on

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

De forma anàloga podíem haver calculat primer la probabilitat de $P(B|A)$ i d'ella haver-ne deduït la probabilitat de $P(A \cap B)$.
En definitiva, doncs,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$
$$P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Llei de les probabilitats totals

Sigui A un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, és a dir, una família finita de successos tal que

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \qquad \text{i} \qquad S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1} \cup B_k.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_{k-1}) + P(A \cap B_k) = \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k) \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Si, com abans, A és un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, aleshores

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot PB_i}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)}, \ i = 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

Aquesta fórmula rep el nom de fórmula per a calcular la probabilitat de les *causes*, ja que com que s'ha de donar una i només una de les causes B_i, ens permet de conèixer la probabilitat d'aquesta causa en el supòsit que s'hagi donat el succés A.

Successos independents

Dos successos A i B són *independents* si, i només si, cap d'ells no condiciona la probabilitat de l'altre; és a dir, si, i només si,

$$P(A|B) = P(A).$$

Dit d'una forma alternativa, si, i només si,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

En general, n successos $A_1, \ldots, A_n$ són *mútuament independents* si, i només si, per a tot $k = 2, \ldots, n$, tenim que

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Variables aleatòries

Quan fem un experiment, moltes vegades estem més interessats en algun valor (que serà un nombre real) associat al resultat de l'experiment, que en el resultat mateix. Per exemple, si juguem a cara i creu amb un altre jugador, de manera que si tirem i surt cara rebem 5 pta i si surt creu li donem al contrari 3 pta, els dos nombres 5 i 3 ens interessen molt més a cada jugada que el fet mateix de sortir cara o creu. Això ens porta a la definició de les funcions que prenen valors sobre el conjunt d'esdeveniments elementals d'un experiment. Per dir-ho d'alguna manera, parlem de les *apostes* del joc.

Suposem que tenim un espai mostral $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i unes probabilitats associades p_i tal com s'ha explicat abans. Una *variable aleatòria* és una funció de l'espai mostral S en $\mathbb{R}$ que associa a cada esdeveniment elemental un nombre real.

$$X : S \to \mathbb{R}.$$

Per exemple, sigui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i definim X així

$$X(1) = X(2) = X(3) = 1, \quad X(4) = X(5) = X(6) = -1.$$

Podem interpretar la variable X com el *guany* d'un jugador que rep 1 pta si surt 1, 2 o 3 al dau o en lliura 1 al contrari si surt 4, 5 o 6 al dau.
Un altre exemple. Tirem una moneda dues vegades i l'espai mostral és

$$S = \{CC, C+, +C, ++\}$$

on C indica cara i + indica creu. Una variable aleatòria sobre aquest espai mostral podria ser el *nombre de cares* obtingudes. Tindríem $X(CC) = 2$, $X(C+) = 1$, $X(+C) = 1$, $X(++) = 0$. Sobre el mateix espai mostral podríem definir altres variables aleatòries, com per exemple, el *nombre de cares menys el nombre de creus* i tindríem $Y(CC) = 2$, $Y(C+) = 0$, $Y(+C) = 0$, $Y(++) = -2$.

Esperança matemàtica
Si tenim una variable aleatòria que pren valors reals $x_2, x_2, \ldots, x_n$ sobre l'espai mostral $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i unes probabilitats associades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, es defineix com a *esperança matemàtica* o també *mitjana* al valor

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Per exemple, si ens demanen l'esperança matemàtica de la variable aleatòria *valor obtingut en tirar un dau no trucat*, hem d'entendre: (a) que l'espai mostral és el de possibles jugades del dau, és a dir $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; (b) que totes les ocurrències tenen la mateixa probabilitat (el dau és no trucat), i per tant $p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$; (c) la variable aleatòria X pren els valors reals 1, 2, 3, 4, 5, 6 segon els punts que surten al dau. L'esperança és

$$1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\ \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Observeu a l'exemple que l'esperança matemàtica o mitjana o *valor esperat* de la variable aleatòria X pot ser un valor real que X pot no prendre mai. La *llei dels grans nombres* ens diu que l'esperança matemàtica d'una variable aleatòria és el valor al qual s'aproxima la mitjana dels valors observats si repetim l'experiment moltes vegades i amb independència.

Problemes

PR3. *El problema de Fermat-Pascal.* Dos jugadors A i B juguen una partida cada una de les quals té una probabilitat de $\frac{1}{2}$ de ser guanyada i de $\frac{1}{2}$ de ser perduda. Suposem que el resultat d'una partida no depèn pas dels resultats de les partides anteriors. [Pensem, per exemple, en una sèrie de "cares i creus".] Cada jugador guanya un punt quan guanya i no-res quan perd. Convenen en jugar-se 100 pta. cada un i que el pot de 200 pta. se l'endurà el primer que guanyi 4 partides.
Per la raó que sigui han de plegar quan A necessita dues partides per tal d'haver-ne guanyat 4 i B en necessita 3. Com cal repartir el pot?
Feu el càlcul
(a) suposant que els successos són les situacions reals a partir d'aquell moment, si el joc hagués continuat (solució de Pascal);
(b) si volem que tots el casos que es considerin siguin equiprobables (solució de Fermat).

PR4. *La paradoxa de Bertrand.* Tirem una corda a l'atzar en un cercle. Quina és la probabilitat que sigui més gran que no pas el costat del triangle equilàter inscrit? Distingiu tres mètodes de càlcul:
(a) la distància al centre;
(b) la situació del punt mig de la corda;
(c) l'angle central que determina la corda.
Quina és la paradoxa?

PR5. *El problema de l'aniversari.* Quina és la probabilitat que en un grup d'n persones n'hi hagi dues almenys que hagin nascut el mateix dia?

PR6. *El problema dels llumins de Banach.* Tenim dues capses de llumins i en posem una a cada butxaca dels pantalons. Cada capsa té n llumins. Quan en necessitem un, triem a l'atzar una butxaca, traiem la capsa de llumins, n'agafem un, i tornem la capsa a la butxaca. Una de les vegades que traiem una capsa, observem que és buida. Quina és la probabilitat que quedin k llumins a l'altra capsa?

PR7. *La ruïna del jugador.* Dos jugadors M i N disposen de m i n pta cada un respectivament. Juguen amb una moneda no trucada. Si surt cara, M dóna una pesseta a N i si surt creu ho fan al revés. El joc continua fins que un dels dos jugadors s'arruïna. Calculeu les probabilitats de guany de cada jugador i la durada mitjana de la partida.

PR8. *El problema de les torres.* Col·loquem 8 torres en un tauler d'escacs. Quina és la probabilitat que cap d'elles pugui matar-ne una altra?

PR9. *El problema dels nombres primers entre si.* Quina és la probabilitat que, en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre ells?

PR10. *El problema dels daus trucats.* Demostreu que és impossible de trucar una parella de daus de manera que les sumes de les puntuacions (tirant-los a la vegada) tinguin totes la mateixa probabilitat.

PR11. Triem un enter a l'atzar entre 1.000.000 i 10.000.000 (inclosos). Quina és la probabilitat que no tingui dues xifres iguals? I que no tingui dues xifres iguals en posicions consecutives?

PR12. Tirem una moneda, després tirem un dau, i finalment traiem una carta d'un joc de 52 cartes i considerem els successos

$$A = \text{surt cara;}$$
$$B = \text{surt un 5 o un 6;}$$
$$C = \text{surt una carta de piques.}$$

Quin és l'espai mostral S associat a aquesta experiència? Quines són, en relació amb aquest espai mostral, els successos $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$? Quines son les probabilitats que els corresponen? Són independents dos a dos? i tots tres?

PR13. Tirem cinc monedes independents. Quina és la probabilitat d'obtenir $c\,c + c\,+$? Quina és la probabilitat que surtin tres cares exactament? Quina és la probabilitat que no surtin tres cares?
Nota: La qüestió és força més complicada si els llançaments no són independents. Intenteu de donar-hi una resposta.

PR14. Barregem les cartes d'una baralla de 52 cartes. Quina és la probabilitat que els 4 asos quedin junts?

PR15. Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

PR16. Tenim 4 cartes conegudes i les posem de cap per avall damunt la taula i a l'atzar els hi atribuïm un valor. Quina és la probabilitat d'endevinar-ne una, dues, tres o quatre?

PR17. En una porta hi ha dos panys i les claus són en una capsa en la qual hi ha sis claus. Si en traiem dues a l'atzar, i en col·loquem una a cada pany, quina és la probabilitat que obrin la porta? Quina és la probabilitat que el parell de claus serveixi per a obrir la porta?

PR18. En una festa hi ha 6 dones i 4 homes i sabem que hi ha dos matrimonis. Triem dues parelles home-dona a l'atzar. Quina és la probabilitat d'endevinar els dos matrimonis? I si sabem que hi ha tres matrimonis, quina és la probabilitat d'endevinar-los?

PR19. Un autobús fa 4 parades dins l'aeroport per tal de distribuir 15 passatgers. Quina és la probabilitat que tots baixin a la mateixa parada? Quina és la probabilitat que almenys una persona baixi a cada una de les parades?

PR20. En un bombo hi ha 366 boles etiquetades amb els dies d'un any de traspàs. Si n'extraiem 180, quina és la probabilitat que corresponguin a dies distribuïts uniformement sobre els 12 mesos? Quina és la probabilitat que entre les 30 primeres boles extretes no n'hi hagi cap del mes d'Agost o del mes de Setembre?

PR21. Un dau perfecte es llença dues vegades. El total de punts obtinguts 7. Quina és la probabilitat que el primer punt hagi estat k, amb $0 \leq k \leq 6$?

PR22. Un pare, una mare i un fill decideixen fer un joc familiar. En cada partida només juguen dues persones. Les partides es poden guanyar o perdre amb la mateixa probabilitat. No es poden empatar. El jugador que guanya una partida juga la següent amb el jugador que està descansant. El joc segueix fins que un dels jugadors guanya exactament dues partides (no necessàriament consecutives). S'acorda, per qüestions d'edat, que el pare pot decidir si intervé o no en la primera partida del joc, o bé si s'espera a que la mare i el fill hagin jugat la primera partida. Quina de les dues decisions li és més avantatjosa?

PR23. Hem de pintar els pisos d'una casa de vuit pisos amb dos colors: el blau i el vermell. Quina és la probabilitat que no hi hagi dos pisos consecutius de color vermell, si la tria dels colors es fa a l'atzar?

PR24. Hem de col·locar tres persones A, B, C en ordre de manera aleatòria. Se'ns acudeixen tres maneres de fer-ho.

(a) En tres papers escrivim els números 1, 2, i 3. Aleshores fem que, per ordre alfabètic, triïn un dels papers. L'ordre el dóna l'ordre del nombre triat.

(b) Escrivim en paperetes totes les permutacions possibles de les lletres A, B, C. Les posem en una capsa i en traiem una a l'atzar. L'ordre ve donat per la l'ordre de la permutació triada.

(c) Procedim com en el cas (a), però ara la tria del paper que porta escrit el nombre es fa, després d'haver triat a l'atzar una permutació de les lletres A, B, C, com en (b). L'ordre final és el dels nombres triats per cada una de les persones.

Quin d'aquests tres mètodes és més equitatiu?

PR25. En Joan tira 6 monedes perfectes i la Maria en tira 5. Quina és la probabilitat que en Joan tregui més cares que no pas la Maria?

PR26. El màgic de cartes Sherwin Betlotz es juga una important quantitat de diners afirmant que no ets capaç de treure 3 cartes d'un joc de 52 cartes sense treure almenys una de les dotze figures. Voldries jugar amb ell una partida apostant la mateixa quantitat de diners?

PR27. Triem tres punts a l'atzar damunt d'una circumferència. Determineu la probabilitat que el triangle format pels tres punts contingui el centre de la circumferència.

PR28. Un club de tennis convida 32 jugadors d'igual habilitat i qualitat. Han de jugar per parelles i el que perd ja no torna a jugar. Quina és la probabilitat que una parella determinada competeixi?

PR29. Vols jugar aquest joc amb mi? Per poder-lo jugar has de pagar 1 €. El joc consisteix en el següent: Remenem ben remenat un joc de cartes. En treus dues. Si són negres, te les quedes. Si són vermelles, me les quedo jo. Si són de colors diferents, les deixem de banda. El joc s'acaba quan s'exhaureixen les cartes. Jo et pagaré 3 € per cada carta que tu tinguis de més que jo.

PR30. Llanço un dau perfecte n vegades. Quina és la probabilitat de treure un nombre senar de sisos?

PR31. Si n^2 monedes es col·loquen a l'atzar en n files de n monedes cada una. D'aquestes monedes n'hi ha n de plata. Quina és la probabilitat que, en almenys una fila, no hi hagi cap moneda de plata?

PR32. Una capsa conté p boles blanques i q boles negres. Al costat de la capsa hi ha una pila suficientment gran de boles negres. S'agafen dues boles a l'atzar de la capsa. Si són del mateix color, a la capsa hi posem una bola negra de la pila. Altrament, hi posem la bola blanca que hem tret. Repetim el procés fins que traiem les dues darreres boles de la capsa i hi col·loquem la darrera bola. Quina és la probabilitat que aquesta darrera bola que queda dins la capsa sigui blanca?

PR33. Llancem una moneda perfecta repetidament fins aconseguir un nombre senar de cares seguides d'una creu. Doneu el nombre esperat de llançaments que cal fer.

PR34. Al voltant d'un llac hi ha n cases. Les pintem usant k colors que anem triant a l'atzar. Quina és la probabilitat que, un cop totes estiguin pintades, no hi hagi dues cases pintades del mateix color?

PR35. Un vell de 75 anys té el 43% de probabilitat de viure 10 anys més. Un de 80, només té el 27% de viure 10 anys més. Un vell de 75 anys té un 20% de probabilitat de viure fins els 90 anys. Quina és la probabilitat que un vell de 80 anys mori en el decurs dels cinc anys següents?

PR36. En una urna hi col·loquem 4 fitxes negres i 5 de blanques. En traiem tres a l'atzar, però una després de l'altre. La segona és negre. Quina és la probabilitat que la tercera també ho sigui?

PR37. Tenim dues baralles de cartes espanyoles. A una d'elles li falta una carta i no sabem quina és. Elegim una baralla a l'atzar i traiem una carta. Quina és la probabilitat que la carta sigui d'oros?

PR38. Tenim dues urnes U_1 i U_2. La primera conté 2 boles blanques i 3 boles negres. La segona conté 2 boles blanques i 3 de vermelles. Traiem una bola de la urna U_1 i la posem en la urna U_2. Després traiem una bola de la urna U_2 i la posem en la urna U_1. Finalment traiem dues boles de la urna U_1 i resulta que una és blanca i l'altra és negra. Quina és la probabilitat que després de fer aquesta darrera extracció la urna U_1 no tingui cap bola vermella?

PR39. En una cel·la d'una presó hi ha tres presoners A, B i C. Un d'ells ha de ser condemnat. La probabilitat de ser condemnat és la mateixa per a cada un d'ells: $1/3$. El presoner A sap que un dels presos B, C no serà condemnat. Tanmateix ho pregunta al guardià. Calculeu la probabilitat que A sigui el condemnat si el guardià li respon: "B no serà condemnat", en el casos següents:
(a) Que A hagi preguntat: "B serà condemnat?"
(b) Que A hagi preguntat: "Quin dels dos B o C no serà condemnat?"
Suposem que el guardià ho sap i que diu la veritat.
Es complica molt el problema si suposem que el guardià ho sap però diu la veritat o menteix després de tirar una moneda a l'aire, segons li surti cara o creu?

PR40. Quan surt cara obtinc 1 €, i quan surt creu n'obtinc 2. La moneda que llanço és perfecta. Guanyo el joc quan obtinc exactament 100 €. La probabilitat de guanyar és més gran, més petita, o igual a $2/3$?

PR41. Un jurat està format per 9 persones que han de donar un veredicte. Cada una d'elles l'emet independentment de les altres amb probabilitat $1/2$ per innocent i $1/2$ per culpable. Quina és la probabilitat que, en acabar la votació, un membre concret del jurat estigui en la majoria. (Quan n és parell, $n = 2k$, està en la majoria si està en el grup format per almenys $k+1$ vots.)

PR42. Quina és la probabilitat que en tirar tres vegades un dau, el producte de les puntuacions obtingudes sigui un múltiple de 6?

PR43. Amb les xifres 1, 1, 2, 2, 4, 5 formem tots els nombres possibles de sis xifres. Trobeu la probabilitat que, en elegir-ne un a l'atzar, sigui múltiple de 12.

PR44. En una capsa hi ha cartonets, cada un dels quals conté una lletra. En total hi ha 8 cartonets amb la lletra A, 5 amb la lletra C i 4 amb la lletra S. Un cec treu 4 cartonets i, posant-los en fila, vol construir la paraula $CASA$. Calculeu la probabilitat que té d'aconseguir-ho.

Nota: El problema està resolt, si cada lletra està al seu lloc, encara que no estigui col·locada de forma correcta: pot estar de cap per avall, o girada a la dreta o a l'esquerra, o ben posada.

PR45. En el joc de les travesses, quantes n'hi ha amb 10 encerts? Quina és la travessa més probable? Quantes n'hi ha sense cap resultat encertat? (Suposem que la travessa conté 14 partits i que cada partit accepta tres valors $1, 2, X$, segons que hagi guanyat el que juga a casa, el que juga fora de casa, o hi hagi hagut empat.)

PR46. Els carrers d'una ciutat formen una quadrícula de carrers verticals i horitzontals. Els carrers horitzontals estan enumerats amb els números 1, 2, 3. Els carrers verticals, en canvi, amb les lletres a, b, c, d, e i f, amb aquest ordre d'esquerra a dreta. Un vianant surt del punt $\langle 1, a\rangle$. Tira un dau perfecte. Si li surt un múltiple de tres fa una travessia horitzontal cap a la dreta. Si no, fa una travessia vertical cap amunt. Això ho fa en cada una de les cruïlles que va trobant en el seu passeig. Quina és la probabilitat que passi per la cruïlla $\langle 3, d\rangle$?

PR47. En un sorteig els tiquets estan numerats $00000, 00001, 00002, \dots, 99998$, 99999.

Quina és la probabilitat que el número que surti només tingui tres xifres diferents?

PR48. Un matrimoni té 5 fills. Calculeu la probabilitat que, entre ells, hi ha almenys dos nois i almenys una noia. La probabilitat de néixer noi o noia és igual a una meitat.

PR49. En Joan va a buscar en Pere que ve en el tren de les 11. Si troba un taxi, arribarà a l'estació a les 11. Si no el troba, hi arribarà a les 11h 15m. La probabilitat de trobar un taxi és de $3/5$, i la probabilitat que el tren es retardi un quart d'hora o més és de $2/9$. Quina és la probabilitat que arribi a l'estació a temps?

PR50. Una capsa conté 9 cartonets marcats de l'1 al 9, ambdós inclosos. Traiem, un a un, tres cartonets. Trobeu la probabilitat que siguin alternativament parell, senar, parell, o bé senar, parell, senar.

PR51. En una urna hi ha b boles blanques i $b+n$ boles negres. Calculeu els valors possibles de b i n per tal que la probabilitat d'obtenir una bola blanca sigui $1/n$.

PR52. D'un joc de 40 cartes n'agafem 5 a l'atzar. Calculeu la probabilitat que tres siguin asos i les altres dues siguin iguals (dos reis, dos quatres, etc.).

PR53. El 50% de cotxes que hi ha en una ciutat són de la marca Seat. Calculeu la probabilitat que, d'entre 10 cotxes aparcats en una plaça, quatre, almenys, siguin d'aquesta marca.

PR54. En el pis cinquè d'una cas de set pisos, em trobo esperant l'ascensor, que inicia l'ascens amb dues persones. Sabent que, en cada pis, hi viuen 10 persones i que jo no sóc pas de la casa, quina és la probabilitat que l'ascensor es pari al cinquè pis?

PR55. Tres ruletes perfectament horitzontals, centrades i equilibrades, contenen sectors circulars, pintats de negre i vermell de la forma següent. La ruleta 1, $180°$ vermell i $180°$ negre. La ruleta 2, $225°$ vermell i $135°$ negre, i la ruleta 3, $270°$ vermell i $90°$ negre. Calculeu la probabilitat que, en jugar simultàniament en les tres ruletes, en dues la bola caigui en el negre i en una en el vermell.

PR56. Elegim a l'atzar dos nombres reals entre 0 i 1. Quina és la probabilitat que un d'ells sigui més petit que el quadrat de l'altre?

PR57. Es consideren tots els nombres naturals d'1 a 10^n, ambdós inclosos. N'agafem un a l'atzar. Quina és la probabilitat, en funció de n, que sigui múltiple de 2 o de 3?

PR58. Tenim tres bosses que contenen n boles numerades $1, 2, 3, \ldots, n$. En traiem una a l'atzar de cada bossa. Suposem que els números de les boles tretes són x, y, z. Quina és la probabilitat que $z = x + y$. (Les bosses són indistingibles.)

PR59. *El joc de la ruleta.* Una ruleta conté els números del 0 al 36, ambdós inclosos. El 0 té el fons gris, la meitat dels 36 nombres tenen el fons vermell i l'altre meitat tenen el fons negre. Les juguesques més corrents són:

(a) Apostar 1 € a un color (vermell o negre). El guany és de 2 €.

(b) Apostar 1 € a un únic número, exclòs el 0. El guany és de 36 €.

(c) Apostar 1 € a una dotzena arbitrària de nombres, exclòs el 0. El guany és de 12 €.

Si surt el 0 la casa guanya i tots els altres jugadors perden.

Sigui X la variable aleatòria que mesura el guany quan juguem amb el mètode (a). Quina és l'esperança de X?

Siguin Y, Z, respectivament, les variables aleatòries que mesuren el guany quan juguem amb el mètode (b) o (c). Quina és l'esperança de Y, i la de Z?

PR60. *Un joc de cara i creu.* En un joc de cara i creu hi ha una probabilitat p que surti cara (C) i una probabilitat q que surti creu ($+$), on $0 \leq p \leq 1$ i $q = 1 - p$. Tirem una moneda fins aconseguir que surti el mateix resultat que en la primera tirada. Aleshores el joc s'acaba. Si el primer resultat és C el jugador guanya un € per cada $+$ que surt fins a la propera cara. Si el primer resultat és $+$ s'intercanvien el papers de C i $+$. Quan hauria d'apostar el jugador per poder jugar a aquest joc de forma que fos equitatiu?

PR61. Un jugador juga a la ruleta d'acord amb el sistema següent. Juga una sèrie de tres tirades. En la primera i la segona aposta un euro al vermell. En la tercera jugada procedeix de la forma següent:

(a) Si va guanyar en la primera i en la segona, no fa cap juguesca.

(b) Si va guanyar en la primera o en la segona i va perdre en l'altra, es juga un euro al color contrari al que ha sortit la segona vegada.

(c) Si va perdre ambdues vegades, es juga tres euros al vermell.

Siguin X, Y, Z els resultats en euros de la primera, la segona, la tercera tirades respectivament. Calculeu les seves esperances, així com l'esperança de la variable aleatòria $X + Y + Z$.

PR62. *El problema de Sant Petersburg.* Un jugador llança una moneda i guanya un € a la primera tirada si surt cara, un altre si surt cara una altra vegada. Si torna a sortir cara en guanya dos més. Si obté una successió de n cares guanya 2^{n-1} €. Quant ha de pagar per poder jugar aquest joc de forma equitativa?

PR63. Les temperatures de Barcelona i Madrid són de x° i y°, respectivament. No les suposem pas independents aquestes dues temperatures. Sabem

(a) $P\big(x^\circ = 30^\circ\big)$, la probabilitat que la temperatura de Barcelona sigui de 30°,

(b) $P\big(y^\circ = 30^\circ\big)$, la probabilitat que la temperatura de Madrid sigui de 30°, i

(c) $P\Big(\text{màx}\big(x^\circ, y^\circ\big) = 30^\circ\Big)$.

Determineu la probabilitat $P\Big(\text{mín}\big(x^\circ, y^\circ\big) = 30^\circ\Big)$.

PR64. Un jurat format per tres membres en té dos que independentment tenen la probabilitat p de donar un veredicte correcte i un de indecís que per decidir el veredicte tira una moneda a l'aire en cada decisió. Un jurat amb un únic membre té una probabilitat p de fer un veredicte correcte. Quin d'aquests dos jurats és més just?

PR65. Un calaix conté mitjons vermells i mitjons negres. La probabilitat que. en treure a l'atzar dos mitjons, siguin vermells és $1/2$. (a) Quin és el valor mínim de mitjons que hi ha d'haver al calaix? (b) Quin és el valor mínim si sabem que de mitjons negres n'hi ha un nombre parell?

PR66. Si tirem quatre daus enlaire, quina és la probabilitat que després de tirar poguem triar dos daus de manera que la suma dels punts que marquen aquests dos daus sigui 7? I si en tirem n en comptes de 4?

PR67. Calculeu la probabilitat que en agafar un nombre natural a l'atzar, aquest no sigui divisible ni per 3, ni per 4, ni per 6, però en canvi ho sigui per 2 o per 5.

Mostra de solucions

Solució del problema PR3

(a) Suposem que seguim jugant realment. Tenim els següents casos i probabilitats

Favorables a A:		*Favorables a B:*	
AA	1/4	$ABBB$	1/16
ABA	1/8	$BABB$	1/16
$ABBA$	1/16	$BBAB$	1/16
BAA	1/8	BBB	1/8
$BABA$	1/16		
$BBAA$	1/16		

El problema no és equirepartit.

(b) Si el problema és equirepartit i considerem tots els casos possibles, és a dir, totes les quaternes possibles –si el joc seguís, en quatre partides segur que hi ha un guanyador– podem comptar fàcilment els casos favorables a A i els casos favorables a B que són, respectivament, 11 i 5. S'obté el mateix resultat que a (a).

Solució del problema PR15

Si els daus són distingibles, aleshores tenim 6^6 resultats diferents.

Si són indistingibles hi ha $CR_6^6 = 462$ casos, que es poden desglosar:

- tots iguals: $C_6^1 = 6$
- 5 d'iguals: $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30$
- 4 d'iguals i $\begin{cases} 2 \text{ de diferents: } & C_6^1 \cdot C_5^2 = 60 \\ 2 \text{ d'iguals: } & C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \end{cases}$

$$\bullet\ 3 \text{ d'iguals i} \begin{cases} 3 \text{ de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^3 = 60 \\ 2 \text{ d'iguals i un de diferent:} \quad C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \\ 3 \text{ d'iguals:} \quad C_6^2 = 15 \end{cases}$$

$$\bullet\ 2 \text{ d'iguals i} \begin{cases} 4 \text{ de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^4 = 30 \\ 2 \text{ d'iguals i 2 de diferents:} \quad C_6^2 \cdot C_4^2 = 90 \\ 2 \text{ d'iguals i 2 diguals:} \quad C_6^3 = 20 \end{cases}$$

• tots diferents: $C_6^6 = 1$

Solució del problema PR16

Tenim 4! maneres diferents d'assignar valors. Volem calcular la probabilitat d'encertar exactament una carta que pot se la primera, o la segona, o la tercera o la quarta. Si les cartes *reals* són a, b, c i d i suposem que hem d'encertar la quarta, els valors que podem assignar a les tres primeres són

$$abc, acb, bac, cba, bca, cab.$$

D'aquests casos, els únics que són favorables a encertar només la quarta són els dos darrers. Els mateix valor ens sortiria si calculéssim els casos favorables a encertar exactament la primera, la segona o la tercera. Els casos favorables en total són 8 i la probabilitat serà $8/24 = 1/3$.

Si hem d'encertar exactament dues cartes, el parell de cartes encertades es pot triar de $C_4^2 = 6$ maneres diferents, i si per exemple hem d'encertar la tercera i la quarta, els valors que podem assignar a la primera i la segona són

$$ab, ba$$

i només aquest últim fa que no s'encerti ni a primera ni la segona. Els casos favorables són 6 i la probabilitat és $6/24 = 1/4$.

Encertar exactament tres cartes és impossible.

Calculeu la probabilitat d'encertar totes les cartes, i la de no encertar-ne cap.

Solució del problema PR67

Posem $I_n = n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$. Aleshores es demana la probabilitat del succés

$$A = (I_2 \cup I_5) \cap \overline{I_3} \cap \overline{I_4} \cap \overline{I_6},$$

on $\overline{I_n} = \mathbb{Z} - I_n$. Cal recordar que $I_n \cap I_m = \{z \in \mathbb{Z} : z = \dot{n} \text{ i } z = \dot{m}\} = I_r$, on $r = \mathrm{mcm}(m, n)$. Cal recordar també que si M i N són succesos, llavors

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

i, com que $M \cap \overline{N} = M - (M \cap N)$,

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M) - P(M \cap N).$$

Ara cal aplicar aquestes fórmules a l'esdeveniment A.

PROBLEMES DE PROBABILITAT*

Jordi Dou Mas de Xexàs

Problema 1. *(Núm 527. Proposat al CM, Vol 6 Núm 3 Març 80. Resolt al Vol 7 Núm 3 Març 81.)*
Sou a la cantonada d'una gran ciutat formada per illes quadrades totes iguals, i voleu passejar. Tireu una moneda enlaire: si surt cara, gireu cap a la dreta, si surt creu, gireu cap a l'esquerra; repetiu aquest procediment a cada cantonada. Quina és la probabilitat que torneu a ser al punt de partida després de caminar n trams?
Solució literal de Jordi Dou. Els trams de lloc senar són tots paral·lels i han de ser-ne la meitat de cada sentit. Anàlogament, els de lloc parell. Per tant n ha de ser múltiple de 4. Tot això per tal de poder tornar al punt d'origen. Està clar que si $n = 4k$, el nombre de camins diferents per a tornar al lloc d'origen sera

$$\binom{2k}{k}^2$$

i el nombre total de camins possibles és $2^{2k} \cdot 2^{2k} = 2^n$. La probabilitat $P(n)$ serà nul·la per a $n \neq 4k$ i, per a $n = 4k$, serà

$$P(n) = \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^n}.$$

Barcelona, maig de 1980

* La Societat Catalana de Matemàtiques té la intenció de publicar una selecció de problemes proposats o resolts per Jordi Dou a diverses revistes del món. La col·lecció de problemes de Jordi Dou és de tal magnitud, que la tasca s'haurà de fer de mica en mica. En aquesta edició del llibre comencem a presentar problemes de probabilitat que Jordi Dou va trametre a CRUX MATHEMATICORUM, amb alguns comentaris de l'autor o de l'editor de la revista.

Problema 2. *(Núm 807. Proposat al CM, Vol 9 Núm 1 Març 83. Resolt al Vol 10 Núm 4 Abril 84.)*
Traiem a l'atzar tres boles d'una urna que conté b boles blanques i r boles vermelles. La probabilitat que les tres boles siguin blanques és p. Si l'urna hagués contingut una bola blanca més, la probabilitat de treure'n tres de blanques hagués estat $4p/3$. Trobeu tots els possibles valors de b i r.

Solució literal de Jordi Dou. Tenim

$$p = \frac{b(b-1)(b-2)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}, \quad \frac{4p}{3} = \frac{(b+1)b(b-1)}{(b+r+1)(b+r)(b+r-1)}.$$

Posem $b-2=x$, $b+r-2=y$ i tindrem

$$\frac{3}{4} = \frac{x(y+3)}{y(x+2)} \quad \text{o bé} \quad y = \frac{12x}{9-x} = \frac{108}{9-x} - 12.$$

Els possibles valors de x són 0, 3, 5, 6, 7, 8. Els parells (b,r) possibles són $(5,3)$, $(7,10)$, $(8,18)$, $(9,35)$ i $(10,88)$.

Problema 3. *(Núm 499. Proposat per Jordi Dou al CM Vol 5 Núm 10 Desembre 79. Resolt al Vol 6 Núm 10 Desembre 80.)*
Un cert políedre té totes les arestes de longitud unitat. Una formiga es mou al llarg de les arestes de manera que quan arriba a un vèrtex eligeix sortir-ne, amb igual probabilitat, per una aresta diferent de la d'arribada. El valor mitjà del camí seguit des un vèrtex fins ell mateix és de 6 per uns vèrtexs i de 7.5 per als altres. Trobeu el volum del políedre.

Solució literal de Jordi Dou. Siguin V_i, $(1 \le i \le n)$ els vèrtexs, a_i el nombre d'arestes de cada V_i, $\sum a_i = 2a$, V_s el vèrtex de sortida, E_s^* el valor mitjà de V_s a V_s, E_r^h el valor mitjà de V_r arribant del vèrtex contigu V_h fins a V_s. $E_s^k = 0$. Tindrem $a_s E_s^* = a_s + \sum E_i^s$ (per a tot i tal que V_i sigui contigu a V_s).

$$E_r^h = 1 + \frac{1}{a_r - 1} \sum E_i^r \quad \text{per a tot } i \text{ tal que } V_i \text{ és contigu a } V_r,\ i \ne h.$$

Sumant totes les $2a - a_s + 1$ igualtats tenim $a_s E_s^* = 2a$ ja que qualsevol $E_r^h, (h, r \ne s)$ figura al segon membre de les $a_h - 1$ igualtats

$$E_h^j = 1 + \frac{1}{a_h - 1} \sum E_i^h \quad j \text{ tal que } V_j \text{ és contigu de } V_h,\ j \ne r.$$

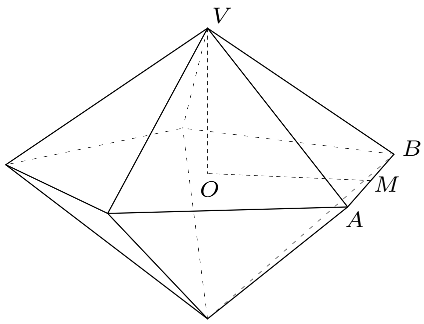
O sigui que, per a tot vèrtex V_k és

$$E_k^* = \frac{2a}{a_k}.$$

Aquest resultat ens diu que només hi ha dos valors diferents entre els a_i, essent el seu quocient $6/7.5$. Aquest valors només poden ser 4 i 5. Tindrem $2a = 4\,7.5 = 5\,6 = 30$ d'on $a = 15$. Els nombres n_4 i n_5 de vèrtexs de 4 i 5 arestes, respectivament, han de complir $4n_4 + 5n_5 = 30$ d'on surt $n_4 = 5$ i $n_5 = 2$. Com que el nombre de cares és $10 = 17 + 2 - 7$, seran totes traingles (equilàters) i el políedre estarà format per dues piràmides pentagonals unides per les bases.

El volum es calcularà: costat pentàgon$= 1$, radi $R = 1/10\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$, apotema $\alpha = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, altura piràmide $h = 1/10\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$,

$$\text{VOLUM:} \quad V = 2\,\frac{1}{3}h\,\frac{5}{2}\alpha = \frac{5}{3}h\alpha = \frac{1}{12}\sqrt{30 + 10\sqrt{5}} \sim 0.603.$$



$\overline{VA} = \overline{AB} = 1$
$\overline{OA} = R = 0.85065$
$\overline{OM} = \alpha = 0.68819$
$\overline{OV} = h = 0.52573$

Barcelona enero 1980

JORDI DOU

Nota de l'editor de CRUX MATHEMATICORUM: "Clearly, the point of this problem was simply to identify the polyhedron in question, and asking point-blank for its volume was nothing but a piece of bravura on the part of the Spanish proposer. *Olé!*"

Problema 4. *(Núm 833. Proposat al CM Vol 9 Núm 4 Abril 83. Resolt al Vol 10 Núm 7 Agost-Setembre 80.)*

a) Quin és l'enter més gran, format per una permutació dels nou dígits no nuls, que és divisible per 99?

b) Quin és el més petit d'aquest nombres divisible per 99?

c) Si els 9 dígits no nuls es posen a l'atzar, quina és la probabilitat que el número que resulti sigui divisible per 99?

d) Responeu les qüestions a), b) i c) si es consideren números formats per tots els deu dígits, excloent els que comencen en 0.

Solució literal de Jordi Dou. Per tal que la permutació sigui divisible per 11 (i per 99), la suma dels 4 dígits que ocupen lloc parell ha de ser 17 (A) o 28 (B). Els nou (A) casos possibles són 1259, 1268, 1349, 1358, 1367, 1457, 2348, 2357 i 2456. Els dos casos (B) possibles són 4789 i 5689.

a) El més gran serà 987652413.

b) El més petit serà 123475869.

El nombre total de $\dot{99}$ serà $(9+2)4!5! = 31680$.

c) La probabilitat buscada serà

$$\frac{31680}{9!} = \frac{11}{2 \cdot 3^2 \cdot 7} \sim 0.0873 \sim \frac{1}{11.45} \quad \left(< \frac{1}{11}\right).$$

Si hi intervenen els deu dígits, els 5 dígits senars seran els ja expressats, agregant-hi el 0 i els seus complementaris. Per al càlcul del nombre de múltiples de 99, s'haurà de restar els nombres que tenen un 0 inicial, que són 31680. O sigui que el nombre total de $\dot{99}$ serà $2 \cdot 11 \cdot 5!\,5! - 31680 = 285120 (= 9 \cdot 31680)$.

a/d) El màxim serà 9876524130.

b/d) El mínim serà 1024375869.

c/d) La probabilitat serà

$$\frac{285120}{(10! - 9!)} = \frac{9 \cdot 31680}{9 \cdot 9!} = \text{la mateixa que a c)}$$

Barcelona, juny de 1983.

La revista CM no publica la solució de Jordi Dou, segurament per massa succinta, ja que la publicada és molt prolixa. Jordi Dou, però, hi afegeix una nota en castellà, que la revista reprodueix íntegrament en anglès

Nota de l'editor de CRUX MATHEMATICORUM: "Comment by Jordi Dou, Barcelona, Spain. Parts (a), (b), and (c) of this problem were proposed in Madrid in 1933 at an examination for professors in which I took part. We were also asked to find the sum, Σ, of all the numbers concerned (permutations of nine nonzero digits which are divisible by 99). If $\Sigma(A)$ denotes the sum of all those odd-position digits sum to 28, then

$$\Sigma(A) = 9 \cdot 4!\,5! \left(101010101\frac{28}{5} + 10101010\frac{17}{4}\right) = 15\,774\,545\,441\,952;$$

and if $\Sigma(B)$ denotes the sum of all whose odd-position digits sum to 17, then

$$\Sigma(B) = 2 \cdot 4!\,5! \left(101010101\frac{17}{5} + 10101010\frac{28}{4}\right) = 2\,385\,454\,541\,184.$$

Thus

$$\Sigma = \Sigma(A) + \Sigma(B) = 18\,159\,999\,983\,136.$$

It was a pleasure for me to rework this problem on its fiftieth anniversary, but armed, this time, with a calculator and in the tranquillity or retirement."

El problema següent va ser proposat per Jordi Dou en homenatge a l'editor de CRUX, Léo Sauvé. Va ser publicada la proposta i la solució del proponent excepcionalment en castellà.

Problema 5. *(Núm 600. Proposat al CM Vol 7 Núm 1 Gener 81. Resolt al Vol 8 Núm 2 Febrer 82.)* (Popuesta para CRUX dedicada al Prof. Léo Sauvé.)
En una urna hay 4 bolas señaladas con las letras `C, R, U, X`. Se extraen sucesivamente n bolas con devolución. Sea P_n la probabilidad de que aparezca `CRUX` en 4 extracciones sucesivas.
a) Calcular el valor mínimo de n para que $P_n > 0.99$.
b) Hallar una fórmula explícita de P_n en función de n.
Solució literal de Jordi Dou publicada al CM. Entre las 4^n variaciones de orden n de los 4 elementos de $\{\mathtt{C,R,U,X}\}$, sea A_n el número de las que no contienen `CRUX`. $A_1 = 4$, $A_2 = 16$, $A_3 = 64$, $A_4 = 255$, $A_5 = 1016$, ... y en general $A_n = 4A_{n-1} - A_{n-4}$, ya que entre las A_{n-1} variaciones de orden $n-1$ hay A_{n-4} que terminan en `CRU` y por tanto

$$A_n = 4\Big(A_{n-1} - A_{n-4}\Big) + 3A_{n-4}.$$

a) Llamando $a_n = A_n/A_{n-1}$, se tiene

$$4 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_n > a$$

siendo $a \neq 0$ el valor que satisface $a^n = 4a^{n-1} - a^{n-4}$. ($a \sim 3.984188231$.)
Sea $\overline{P}_n = 1 - P_n$. Se tendrá $\overline{P}_n = A_n\,4^{-n}$. Sea $p_n = \overline{P}_n/\overline{P}_{n-1}$; tenemos

$$1 = p_2 = p_3 > p_4 > \cdots > p_n > p = a/4 \sim 0.9727478027,$$

$$\overline{P}_{10} = A_{10}\,4^{-10} = 0.9727478027,$$

$$p_{11} = \frac{A_{11}}{4A_{10}} = \frac{4063872}{4\dot{1}020000} = 0.996047058.$$

Tendremos $\overline{P}_{10}\, p^{n-10} < \overline{P}_n < \overline{P}_n\, p_{11}^{n-10}$. Poniendo $\overline{P}_n = 0.01.$,

$$n^{-10} > \frac{\log 0.01 - \log \overline{P}_{10}}{\log p} \sim 1155.7.$$

Vemos que

$$\overline{P}_{1165} > 0.972747\dot{0}.996047^{1155} \sim 0.0100277,$$

y que

$$\overline{P}_{1166} < 0.972748\dot{0}.996048^{1156} \sim 0.0099997,$$

por tanto $P_{1165} < 0.99 < P_{1166}$. Luego $n = 1166$.

b) Sea

$$\varphi(n) = 4^n - \binom{n-3}{1} 4^{n-4} + \binom{n-6}{2} 4^{n-8} - \cdots = \sum_{0 \le i \le n/4} (-1)^i \binom{n-3i}{i} 4^{n-4i}.$$

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ se tiene $\varphi(n) = A_n$. Si suponemos $A_i = \varphi(i)$ para $i < n$ se tiene

$$A_n = 4A_{n-1} - A_{n-4} = 4\varphi(n-1) - \varphi(n-4),$$

y siendo

$$4(-1)^i \binom{n-1-3i}{i} 4^{n-1-4i} - (-1)^{i-1} \binom{n-4-3(i-1)}{i-1} 4^{n-4-4(i-1)} = (-1)^i \binom{n-3i}{i} 4^{n-4i},$$

tendremos $4\varphi(n-1) - \varphi(n-4) = \varphi(n) = A_n$. $P_n = 1 - \overline{P}_n = (4^n - A_n)\, 4^{-4i}$, luego

$$P_n = \sum_{1 \le i \le n/4} (-1)^{i+1} \binom{n-3i}{i} 4^{-4i}.$$

En una sucesión A_i: A_1, A_2, A_3, A_4, $A_i = 4A_{i-1} - A_{i-4}$, tal que $a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge a$ (que es el caso del problema), claro que las a_i son decrecientes.

El resultado $n = 1166$ de a) puede obtenerse fácilmente de la expresión de P_n hallada en b). Para el cálculo de P_{1166} con error menor que 10^{-6} basta calcular los 20 primeros términos. Claro que el método utilizado en la solución, basado en la rápida convergencia de a_n o p_n es más simple.

Editor's comment.

The linguistic policy of this journal is to publish in French and English only. This time, exceptionally, we decided to honour our distinguished proposer, who recently retired from the Escola Tècnica Superior Arquitectura de Barcelona after a lifetime of service to mathematics and architecture, by publishing his solution in the original Castilian.

POLINOMIS

Lluís Bibiloni i Matos, Pelegrí Viader i Canals

Introducció

Designarem un polinomi de grau n de la variable x mitjançant la notació

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Així, a_k sempre denotarà el coeficient del monomi de grau k. En principi els coeficients seran nombres reals i, aleshores, direm que $P(x)$ és un polinomi a coeficients reals i escriurem $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (o complexos, $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, encara que llavors s'acostuma a especificar aquesta circumstància).
El grau d'un monomi $a_k x^k$, $a_k \neq 0$, és el nombre natural k. El grau d'un polinomi és el grau del monomi de grau màxim. Les constants es consideren polinomis de grau 0. El polinomi 0, és a dir, el polinomi idènticament nul, no té grau. En la major part dels problemes, els coeficients acostumen a ser enters ($P(x) \in \mathbb{Z}[x]$) o racionals ($P(x) \in \mathbb{Q}[x]$).
Cal recordar que els polinomis són una subclasse de les expressions algebraiques d'una variable. Són les expressions algebraiques enteres, és a dir, que les operacions que lliguen les variables i els coeficients son la suma, la resta i la multiplicació.

Definició. Dos polinomis o, en general, dues expressions algebraiques de qualsevol nombre de variables s'anomenen *equivalents* si prenen el mateix valor numèric per a qualsevol sistema de valors que assignem a les variables.
Exemples d'expressions equivalents són les ben conegudes identitats de suma i diferència del quadrat d'un binomi; en símbols:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$

o la seva generalització coneguda com la fórmula del binomi de Newton. En el cas important $a = 1, b = x$ la fórmula de Newton agafa la forma:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

El principi d'identitat

Definició. Un polinomi s'anomena *idènticament nul* quan els seus coeficients són zero.

Definició. Dos polinomis s'anomenen *idèntics* quan tenen el mateix grau i els mateixos coeficients.

Per tant, dos polinomis són idèntics quan la seva diferència és un polinomi idènticament nul. La importància d'aquestes definicions rau en el

Principi d'Identitat. Dos polinomis són idèntics si, i només si, són equivalents.

Esquema d'una demostració: Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ són equivalents (s'acostuma a escriure $P(x) \equiv Q(x)$), en particular han de coincidir per $x = 0$ de manera que $a_0 = P(0) = Q(0) = b_0$, així, doncs, per a tot valor d'x serà

$$a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Això es pot escriure

$$xP_1(x) = x(a_1 + \cdots + a_n x^{n-1}) = x(b_1 + \cdots + b_m x^{m-1}) = xQ_1(x)$$

per a tot valor d'x. En altres paraules $xP_1(x) \equiv xQ_1(x)$. D'això en podem concloure que $P_1(x) = Q_1(x)$ sempre que $x \neq 0$ però per poder derivar que $a_1 = b_1$ (i arribar a una demostració per inducció), necessitem poder assegurar que $P_1(0) = Q_1(0)$ i això s'ha de demostrar. Coneixeu algun argument que garanteix la veritat d'aquesta afirmació?
Per una demostració alternativa vegeu el problema **PL5**

A l'hora de resoldre problemes, la conseqüència més important del Principi d'Identitat és l'anomenat *mètode dels coeficients indeterminats*. Explicarem en què consisteix aquest mètode resolent el següent problema de tothom conegut.

Les solucions de l'equació $a\,x^2+b\,x+c=0\,,\ a\neq 0$ *admeten l'expressió*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

Solució. És obvi que les solucions de l'equació de segon grau $\gamma\,(x-\alpha)^2+\beta=0$ són

$$x_1=\alpha+\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}},\qquad x_2=\alpha-\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}.$$

D'altra banda, és clar que si dos polinomis són equivalents, han de tenir les mateixes arrels. Per tant, el problema quedarà resolt si sabem determinar α,β i γ de manera que $a\,x^2+b\,x+c$ i $\gamma\,(x-\alpha)^2+\beta$ siguin equivalents. és evident que $\gamma\,(x-\alpha)^2+\beta$ és equivalent a $\gamma\,x^2-2\,\gamma\alpha x+\gamma\alpha^2+\beta$ i del principi d'identitat obtenim que aquest últim polinomi i $a\,x^2+b\,x+c$ són equivalents si, i només si,

$$\begin{cases} a=\gamma \\ b=-2\,\gamma\alpha \\ c=\gamma\alpha^2+\beta. \end{cases}$$

Queda a càrrec del lector discutir i resoldre aquest sistema d'equacions en les incògnites α,β i γ i acabar el problema a la seva satisfacció.

PL1. Trobeu tots els nombres primers de la forma n^4+4.

Indicació: Factoritzeu el polinomi x^4+4 en producte de dos polinomis de segon grau utilitzant el mètode dels coeficients indeterminats.

PL2. (XXIV Olimpíada Espanyola.) Calculeu per a qualsevol valor del paràmetre enter t, solucions enteres x,y de l'equació

$$y^2=x^4-22\,x^3+43\,x^2+858\,x+t^2+10452\,(t+39)$$

Algunes identitats remarcables

- $\dfrac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$
- $\dfrac{x^n + a^n}{x - a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és senar: $\dfrac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1}$
- Si n és parell: $\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és parell: $\dfrac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1}$.
- Si n és senar: $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$ la divisió no és exacta.

El cas $a = 1$ és de molta importància (suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica):

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

De passada, ja que som aquí, esmentem que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{(sèrie infinita). La igualtat val només si } |x| < 1.$$

D'aquí, per substitució directe s'obté (per $|x| < 1$):

$\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ (signes alternats).

$\dfrac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$

$\dfrac{1}{1 - x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots$

PL3. Demostreu que per a tot $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = (1 + x)\,(1 + x^2) \cdots (1 + x^{2^n}).$$

Aritmètica de Polinomis

Suposem conegudes les operacions algebraiques habituals, incloent la divisió entera de polinomis i la propietat fonamental que afirma el grau del producte de dos polinomis és la suma dels graus dels factors.

Les propietats que llistem a continuació són vàlides pels polinomis a coeficients racionals, reals i complexos.

• Càlcul del *màxim comú divisor* de dos polinomis utilitzant l'algorisme d'Euclides. Si $R(x)$ és el residu de dividir $P(x)$ per $Q(x)$, els divisors comuns de $P(x)$ i $Q(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $Q(x)$ i $R(x)$. L'algorisme consisteix en anar fent les divisions següents:

$$\begin{array}{ll}
P(x) = C_1(x)Q(x) + R_1(x) & \text{grau de } R_1(x) < \text{grau de } Q(x); \\
Q(x) = C_2(x)R_1(x) + R_2(x) & \text{grau de } R_2(x) < \text{grau de } R_1(x); \\
R_1(x) = C_3(x)R_2(x) + R_3(x) & \text{grau de } R_3(x) < \text{grau de } R_2(x); \\
\ldots & \ldots \\
R_{k-2}(x) = C_k(x)R_{k-1}(x) + R_k(x) & \text{grau de } R_k(x) < \text{grau de } R_{k-1}(x); \\
R_{k-1}(x) = C_{k+1}(x)R_k(x). &
\end{array}$$

Si $R_k(x)$ és una constant, direm que $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = 1$, i que $P(x)$ i $Q(x)$ són primers entre sí. En altre cas, $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = R_k(x)$.

• Mínim comú múltiple. Es pot calcular com el producte dels polinomis dividit pel màxim comú divisor.

• Concepte de polinomi irreductible: Un polinomi és *irreductible* o *primer* quan no es pot expressar com a producte de polinomis de grau inferior. Cal parar compte en el fet que un polinomi pot ser irreductible a $\mathbb{Q}[x]$ i ser reductible, per exemple, a $\mathbb{R}[x]$ o a $\mathbb{C}[x]$. Trobeu-ne exemples.

• Igual que en el cas dels nombres enters, tenim el

Teorema de la factorització única.: Tot polinomi a coeficients racionals es pot expressar de manera única com a producte de polinomis irreductibles.

• Avaluació d'un polinomi per un valor concret de la variable utilitzant el: **Teorema del residu**: El residu de dividir $P(x)$ per $x - a$ és $P(a)$. La divisió és convenient fer-la pel mètode de Ruffini.

PL4. Demostreu que $x^2 - 2$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$.

Arrels

Si $P(a) = 0$, es diu que el nombre a és una *arrel* del polinomi $P(x)$. Fixeu-vos que si a es una arrel de $P(x)$, el teorema del residu ens afirma que $x - a$ és un divisor de $P(x)$, és a dir, $P(x) = C(x)(x - a)$.

PL5. Demostreu que un polinomi de grau $n > 0$ no pot tenir més de n arrels.

Utilitzeu aquest resultat per derivar una demostració del Principi d'Identitat.(De fet, es tracta de provar una afirmació més forta que implica aquest enunciat: vegeu el problema següent).

PL6. Demostreu que si un polinomi de grau n s'anul·la per més de n valors de la variable, aleshores el polinomi és idènticament nul.

Quan s'admeten arrels complexes, el resultat contingut en el problema **PL5** es completa amb l'important:

Teorema Fonamental de l'àlgebra, que ens assegura que un polinomi de grau n té exactament n arrels, que poden ser complexes.

Això implica que en el camp complex, els únics polinomis irreductibles són els polinomis de grau 1.

Si els coeficients del polinomi són nombres reals, les arrels complexes s'han de presentar de dues en dues ja que si $a+bi$ és arrel, $a-bi$ (el complex conjugat) també ho és (demostreu-ho). Això justifica el següent resultat: *un polinomi amb coeficients reals i grau imparell té almenys una arrel real.*

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ són les n arrels del polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau n, el polinomi admet la descomposició en factors lineals:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n).$$

S'ha de parar compte amb el a_n del davant, és fàcil d'oblidar-lo. Si hi ha arrels múltiples, els factors iguals es poden agrupar:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_s)^{r_s}.$$

La relació

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv a_n(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_s)^{r_s}$$

i el Principi d'identitat impliquen que els coeficients de $P(x)$ s'expressen en funció de les seves arrels mitjançant les anomenades fórmules de Cardano:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\cdots \\
&\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n},
\end{aligned}
$$

és a dir, la suma de tots els possibles productes de k arrels és exactament el coeficient de x^{n-k} dividit per a_n amb signe $(-1)^k$.

PL7. L'equació $x^3 + 3x^2 + qx + 3q = 0$ té dues solucions que sumen 0. Calculeu, si és possible, el coeficient q i trobeu totes les solucions.

Els primers membres de les fórmules de Cardano tenen la propietat de ser invariants per permutacions de les arrels (és a dir, són *funcions simètriques* de les seves variables, cosa que vol dir que no canvien de valor si intercanviem α_i per α_j, etc.). són les anomenades *funcions simètriques elementals.* Un resultat important i útil a l'hora de resoldre problemes és el teorema següent: *Qualsevol funció racional simètrica de les arrels d'un polinomi s'expressa com a funció racional dels coeficients i recíprocament.*
A la pràctica, trobar l'expressió concreta d'una determinada funció simètrica de les arrels no és fàcil. Per exemple:

PL8. Siguin a, b, c les arrels del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$. Trobeu el valor de $a^4 + b^4 + c^4$.

PL9. (XXVII Olimpíada Espanyola.) Considereu l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0, r \neq 0$, que suposem admet tres arrels reals i positives, a, b, c. Determineu la relació que ha de lligar els nombres p, q i r per tal que els tres nombres a, b, c puguin ésser les longituds dels costats d'un triangle.
(*Indicació:* Suposeu les arrels ordenades $a \geq b \geq c$ i expresseu la condició de poder formar triangle com una desigualtat que involucri una funció simètrica de a, b, c.)

De les relacions de Cardano, l'última és la més útil. Ens diu que el producte de totes les arrels i a_n és igual al terme independent, amb el signe corresponent:

$$a_n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n a_0.$$

Si els coeficients del polinomi són *enters*, llavors aquesta última relació ens demostra que si α_k és una arrel entera del polinomi, ha de ser forçosament un dels divisors de a_0 amb signe $+$ o $-$. No és difícil deduir també que si α_k és una arrel fraccionària del polinomi, diguem p/q, llavors$p$ ha de ser un divisor de a_0 (amb signe $+$ o $-$) i q ha de ser un divisor de a_n. En particular, si $a_n = 1$ el polinomi no pot tenir arrels fraccionàries, llevat de les enteres.

No és difícil tampoc obtenir el següents resultats:

PL10. Si $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, i $P(0)$ i $P(1)$ són imparells, el polinomi no té arrels enteres.

PL11. Si cap dels nombres $P(-1), P(0), P(1)$ és múltiple de 3, el polinomi $P \in \mathbb{Z}[x]$ no té arrels enteres.

PL12. Si un polinomi té una arrel de multiplicitat r, el polinomi derivat té també la mateixa arrel amb multiplicitat $r-1$. Com a conseqüència, si un polinomi no té arrels múltiples, $\text{mcd}(P(x), P'(x)) = 1$.

Si α és arrel múltiple de $P(x)$ de grau n, també és arrel del polinomi $P(x) - Q(x) \cdot P'(x)$ on $Q(x)$ és qualsevol polinomi. Un cas particular interessant és dóna quan $Q(x) = x/n$ ja que aleshores els polinomi $P(x) - P'(x) \cdot (x/n)$ té grau $n-1$.

Fitació de les arrels

Hi ha moltes maneres de donar fites superiors de les arrels positives d'un polinomi. Una de senzilla i fàcil d'obtenir és la fita de MacLaurin: totes les arrels positives es mantenen inferiors que el nombre $1 + N/a_n$ on N és el màxim valor absolut dels coeficients negatius. En general es compleix:

Regla de Laguerre-Thibault.

Si en dividir un polinomi per $x - L$, (on L és un nombre positiu) tots els coeficients del quocient i el residu són positius, L és una fita superior de les arrels del polinomi. Una manera pràctica de fer això és efectuar la divisió per Ruffini i observar que tots els signes del resultat són positius.

PL13. Demostreu la Regla de Laguerre-Thibault i que la fita de MacLaurin és realment una fita superior de les arrels.

Regla de Descartes.

Si $P(x)$ té els coeficients reals, el nombre total d'arrels reals positives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients (se suposa el polinomi ben ordenat; si alguns coeficients són 0, no s'han de tenir en compte per a calcular el nombre de canvis de signe). De la mateixa manera, el nombre total d'arrels reals negatives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients del polinomi $P(-x)$. En qualsevol cas, la diferència entre el nombre d'arrels i el nombre de canvis de signe és sempre un nombre *parell*. La Regla de Descartes només és útil en determinades condicions "extremes". Si no hi ha canvis de signe, llavors *segur* que no hi ha arrels positives; si només hi ha un canvi de signe *segur* que només hi ha una arrel positiva.

PL14. Verifiqueu que el polinomi $x^{11}+x^8-3x^5+x^4+x^3-2x^2+x-2$ té com a màxim 5 arrels positives i 2 de negatives. Demostreu que, com a mínim, té 4 arrels complexes.

PL15. (XXIII Olimpíada Espanyola.) Per a cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2\,x + 1.$$

a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.

b) Calculeu $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Canvis de variable

PL16. Demostreu que si en un polinomi canviem x per:

a) $-x$, aleshores les arrels canvien de signe.

b) $x + a$, aleshores les arrels queden sumades amb $-a$.

c) βx, aleshores les arrels queden multiplicades per $1/\beta$.

d) $1/x$, aleshores les arrels queden invertides.

(S'entén sempre que ens referim a la relació entre les arrels del nou polinomi i les del vell.)

Aquests últims resultats són força útils en molts problemes. Canviar la x per $x - a$ pot ser difícil en alguns casos, donat el càlcul que això representa. De vegades, per a fer això, pot ser útil recordar el *Teorema de Taylor:*

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si fem $a = 0$, trobem una manera interessant d'expressar els coeficients d'un polinomi: $a_k = P^{(k)}(0)/k!$

Polinomis especials

PL17. Els polinomis de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ amb $a \neq 0$ s'anomenen polinomis recíprocs de quart grau. Demostreu

a) Si α és arrel, aleshores $1/\alpha$ també ho és.

b) Es poden trobar les arrels dividint tot el polinomi per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x$.

Els polinomis de la forma $x^n - 1$ són especialment importants. Les seves arrels són fàcils de trobar: $x = \sqrt[n]{1}$.

Recorrent a la radicació complexa mitjançant la la fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta,$$

s'obté

$$1, \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Aquests nombres complexos, tots de mòdul 1, s'anomenen les *arrels n-èsimes de la unitat*. Si les dibuixem al pla complex, es distribueixen regularment sobre el cercle unitat i unint els extrems dels afixos corresponents obtenim un n-àgon regular. Entre aquestes arrels n-èsimes de la unitat n'hi ha que tenen la propietat de "generar" totes les altres en el sentit següent: $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \ldots, \xi^{n-1}$ són totes les arrels n-èsimes de la unitat. Direm que ξ és una *arrel primitiva n-èsima de la unitat*.

PL18.

a) Trobeu les arrels primitives sisenes de la unitat.

b) Sigui $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Demostreu que ζ^k és una arrel primitiva n-èsima de la unitat si i només si k i n son primers entre si.

(*Suggeriment*: Si recordeu la funció $\varphi(n)$ (l'indicador d'Euler), podem dir que el nombre total d'arrels primitives n-èsimes de la unitat és $\varphi(n)$.)

PL19. Es defineix $\Phi_n(x)$ com el n-èsim polinomi ciclotòmic de la següent manera:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)})$$

on $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ són totes les arrels primitives n-èsimes de la unitat. Comproveu que
a) $\Phi_2(x) = x + 1$
b) $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$
c) $\Phi_4(x) = x^2 + 1$
d) $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
e) $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$
Conjectureu com serà $\Phi_p(x)$ si p és primer i demostreu la vostra conjectura.

Tots els polinomis ciclotòmics són irreductibles sobre els enters o els racionals, és a dir, no admeten descomposicions en factors de grau més petit amb coeficients racionals.

Problemes

PL20. Demostreu que la mitjana geomètrica de dos nombres és sempre menor o igual que la seva mitjana aritmètica.

PL21. (Olimpíada Austríaca). Trobeu tots els enters positius n pels quals l'equació de segon grau

$$a_{n+1}x^2 - 2x\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

té arrels reals per a qualssevol nombres reals $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

PL22. (Olimpíada Russa, Leningrad). Siguin P_1, P_2 i P_3 polinomis de segon grau amb coeficient principal positiu i arrels reals. Demostreu que, si cada parell d'ells té una arrel comuna, llavors el polinomi $P_1 + P_2 + P_3$ té també arrels reals.

PL23. (Mathematics Magazine). Demostreu que el polinomi $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ no té arrels negatives.

PL24. Si les arrels del polinomi $x^3 + ax^2 + bx + c$ estan

a) en progressió aritmètica, demostreu que $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

b) en progressió geomètrica, demostreu que $a^3c = b^3$.

PL25. (Olimpíada Internacional). Demostreu que

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

PL26. (15th IMO, 1973). Siguin a i b nombres reals pels quals l'equació

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

té almenys una solució real. Per a tots aquests parells (a, b), trobeu el mínim valor de $a^2 + b^2$.

PL27. Calculeu la suma $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$.

PL28. (XXIV Olimpíada Catalana). Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $xp(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre en té només una.

PL29. Inscrivim un heptàgon regular en el cercle de radi unitat. Demostreu que la longitud del costat és una arrel del polinomi $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$.

PL30. El producte de dues de les quatre arrels de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

és -32. Determineu k.

PL31. Demostreu que tot polinomi té un múltiple polinomial no zero (és a dir el polinomi multiplicat per un altre polinomi), els exponents del qual són tots divisibles per 1000000.

PL32. Demostreu que

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1}.$$

PL33. Demostreu que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

PL34. (XXIII Olimpíada Espanyola.) Demostreu que per a tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + 3 \cdot \sqrt{\binom{n}{3}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} \le \sqrt{2^{n-1}\, n^3}.$$

Mostra de solucions

Solució del problema PL2

Un polinomi de quart grau $Q(x)$, sempre admet una representació de la forma $Q(x) \equiv \big(p(x)\big)^2 + q(x)$ amb $q(x)$ de primer grau. Només cal escriure $p(x) = ax^2 + bx + c$ i determinar a, b, c per minimitzar el grau de $Q(x) - \big(p(x)\big)^2$. També ho podeu fer completant quadrats.

Sigui, doncs, $Q(x) = x^4 - 22\,x^3 + 43\,x^2 + 858\,x + t^2 + 10452\,(t+39)$. és clar que per eliminar els monomis de quart i de tercer grau de $Q(x) - \big(p(x)\big)^2$ haurà de ser $a = 1$ i $b = -11$ Si escrivim $p(x) = x^2 - 11x + c$, per tal de determinar c fem

$$Q(x) - \big(p(x)\big)^2 = (-2\,c - 78)\,x^2 + (22\,c + 858)\,x - c^2 + +t^2 + 10452\,(t+39)$$

de manera que $-2\,c - 78 = 0$ equival a $c = -39$ (quina casualitat!!). El coeficient de primer grau, passa a valer, aleshores, $22\,(-39) + 858 = 0$ (una altra casualitat, segurament). Resumint,

$$Q(x) = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 + t^2 + 10452\,(t+39) - 39^2.$$

El terme independent es pot escriure $t^2 - 39^2 + 10452\,(t+39) = (t+39)\,(t-39) + 10452\,(t+39)$ i per tant, $(t+39)\,(t + 10452 - 39)$. Fent el canvi de variable

$$t = s - \frac{10452 - 39 + 39}{2} = s - \frac{10452}{2} = s - 5226,$$

agafa la forma $(s - 5187)\,(s + 5187) = s^2 - 5187^2$. El problema inicial es pot reformular demanant que per cada valor del paràmetre enter s es trobin solucions enteres x, y de l'equació

$$y^2 = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 + s^2 - 5187^2$$

que és equivalent a l'equació

$$y^2 - s^2 = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 - 5187^2.$$

En arribar aquest punt, val a dir que l'enunciat del problema sinó ambigu, com a mínim, és confús. Si no es llegeix amb atenció, hom pot pensar que es demanen totes les solucions i, aleshores, el problema no es raonable, tal com veurem més endavant.

Un cop convençuts que allò que es demana és trobar algunes solucions enteres x, y per a cada valor del paràmetre s (o $t = s - 5226$) es pot procedir de la següent manera. Fent $y = \pm s$, x, y seran solucions si $\big(x^2 - 11x - 39\big)^2 = 5187^2$ i, resulta (de nou, casualment) que l'equació $x^2 - 11x - 39 = 5187$ equivalent a $x^2 - 11x - 5226$ té les solucions $x_1 = -67, x_1 = 78$ de manera que per a cada t enter, $x = -67, y = \pm(t - 5226)$ i $x = 78, y = \pm(t - 5226)$ són quatre solucions del del tipus que es demanen.

Des d'un punt de vista estricte, per donar el problema per acabat cal, encara, explicar perquè es raonable suposar que el problema no pot demanar altra cosa. Per a cada valor enter de x, $n(x) = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 - 5187^2$ és un enter que admet una expressió en diferència de quadrats. Resoldre $y^2 - s^2 = n(x)$ equival a trobar totes les descomposicions de $n(x)$ en diferència de quadrats. Aquest és un problema que depèn de la descomposició de n en factors primers. De fet és fàcil provar i ho deixem com exercici pel lector, que a cada descomposició d'un enter m en producte de dos factors, $m = a\,b$ de la mateixa paritat, li correspon una representació com a diferència de quadrats. Per exemple, un nombre relativament petit com $4725 = 2^3\,5^2\,7$ admet 12 representacions, essencialment diferents, en diferència de dos quadrats.

Per últim direm, que si hem dedicat tant d'espai en aquest problema no es pas perquè el considerem especialment enriquidor, ans al contrari, perquè ningú no dediqui a la seva solució, mes temps d'aquell que és convenient.

Solució del problema PL8

L'expressió $a^4 + b^4 + c^4$ és una funció simètrica de les arrels; per tant es pot expressar com a funció dels coeficients. Si a és arrel del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$ s'ha de complir que $a^3 - 2a^2 + a + 5 = 0$. Així, si dividim a^4 entre $a^3 - 2a^2 + a + 5$ tindrem

$$a^4 = (a+2)(a^3 - 2a^2 + a + 5) + 3a^2 - 7a - 10 = 3a^2 - 7a - 10.$$

Igualment

$$b^4 = 3b^2 - 7b - 10 \quad \text{i} \quad c^4 = 3c^2 - 7c - 10.$$

O sigui que

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= 3a^2 - 7a - 10 + 3b^2 - 7b - 10 + 3c^2 - 7c - 10 = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 7(a + b + c) - 30. \end{aligned}$$

Ara,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

i, per les relacions de Cardano,

$$a + b + c = 2, \quad ab + ac + bc = 1$$

i tenim

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3 \cdot (2^2 - 2 \cdot 1) - 7 \cdot 2 - 30 = -38.$$

Solució del problema PL26

Tenim una equació recíproca de 4rt grau. Dividint per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x$ resulta $y^2 + ay + (b-2) = 0$. El canvi efectuat dóna $x^2 - yx + 1 = 0$. Per tal que x sigui real, la y ha de complir $y^2 - 4 \geq 0$ i per tant $|y| \geq 2$. Com que l'equació en y és $y^2 + ay + b - 2 = 0$, les arrels seran

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}.$$

Si una d'elles ha de ser $|y| \geq 2$, aleshores $|a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geq 4$. D'aquí traiem $8|a| \geq 8 + 4b$. Simplificant, elevant al quadrat i sumant $4b^2$ als dos costats obtenim $4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$ d'on

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

El mínim del segon membre es dóna quan $b = -2/5$ i val exactament $4/5$. El corresponent valor de a és $4\sqrt{5}/5$ i, efectivament, per aquests valors de a i b es compleixen les condicions del problema.

Solució del problema PL27

$$\begin{aligned}1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} &= \frac{d}{dx}(x + x^2 + \cdots + x^n) = \\ &= \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Substituint x per 2, obtenim la suma desitjada: $2^n(n-1) + 1$.

Solució del problema PL29

El costat de l'heptàgon és $2\sin\pi/7$. Aplicant la fórmula de De Moivre:

$$(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})^7 = \cos\pi + i\sin\pi$$

Igualant parts imaginàries, tenim:

$$-64\sin^7\frac{\pi}{7} + 112\sin^5\frac{\pi}{7} - 56\sin^3\frac{\pi}{7} + 7\sin\frac{\pi}{7} = 0.$$

Ara només cal substituir $\sin\frac{\pi}{7}$ per $l/2$.

NOMBRES COMPLEXOS

Cristóbal Sánchez Rubio

Introducció

És habitual trobar a la majoria de textos la introducció als nombres complexos amb l'argument "natural" de resoldre l'equació quadràtica

$$x^2 + 1 = 0,$$

com a pas previ al fet que tota equació de segon grau tingui dues solucions. No obstant, històricament no va anar així, ja que la resolució mitjançant radicals de l'equació polinòmica de segon grau era perfectament coneguda pels algebristes italians del Renaixement. Una equació de segon grau en el camp real té dues solucions, una o cap; situacions que es corresponen des del punt de vista geomètric amb el fet que una circumferència (o una cònica) i una recta es tallin en dos punts, un o cap. Res no exigia haver de resoldre l'equació $x^2 + 1 = 0$.

Més important era buscar una fórmula per a la resolució de l'equació polinòmica de grau tres. Quan aquesta fórmula es descobreix (Tartaglia i Cardano en el segle XVI) apareix la situació següent que és ben sorprenent:

Si l'equació general polinòmica de tercer grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

la transformem en una de la forma

$$x^3 + px + q = 0$$

dividint per a i després fent un canvi de variable del tipus $x = x' - \dfrac{b}{3}$, en resoldre aquesta darrera equació s'arriba a la fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}.$$

Considerem un polinomi de tercer grau amb tres arrels reals conegudes, -2, $1+\sqrt{3}$ i $1-\sqrt{3}$,

$$(x+2)\Big(x-1-\sqrt{3}\Big)\Big(x-1+\sqrt{3}\Big) = (x+2)\big(x^2-2x-3\big) = x^3-6x-4.$$

Si apliquem la fórmula de resolució a l'equació $x^3-6x-4=0$ prenent els dos signes $+$ s'obté:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}} = \sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}}.$$

On són les arrels de l'equació donada si la seva existència és inqüestionable?
En primer lloc ens apareix l'expressió $\sqrt{-1}$ que en principi no té significat. Des d'un punt de vista purament formal podem operar amb el símbol $\sqrt{-1}$ sense preocupar-nos pel seu significat i només fent servir que el seu quadrat és -1.
Com que

$$\Big(-1-\sqrt{-1}\Big)^3 = -1+3\sqrt{-1}-3\Big(\sqrt{-1}\Big)^2+\Big(\sqrt{-1}\Big)^3 = 2+2\sqrt{-1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}} = -1+\sqrt{-1}$$

podem intentar el càlcul de x

$$x = \sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}} = -1+\sqrt{-1}+\frac{2}{-1+\sqrt{-1}} =$$
$$= -1+\sqrt{-1}+2\frac{-1-\sqrt{-1}}{1+1} = -2.$$

Les altres dues arrels apareixen en prendre els altres dos valors de les arrels cúbiques.
Aquesta relació amb nombres com $\sqrt{-1}$ l'existència dels quals era més que qüestionable a l'època (d'aquí el nom d'"imaginari") i que tanmateix servien per a obtenir les solucions reals d'una equació va tardar dos segles a formalitzar-se i fou el problema que de d'una manera "natural" exigí el maneig de les arrels quadrades de nombres negatius.[1]

[1] Per a un estudi complet de les fórmules per a la resolució de les equacions de tercer i quart grau vegeu per exemple *Àlgebra moderna* de G.Birkhoff i S. MacLane. Ed. Vicens Vives. Pàgina 121

El punt de vista formal

Podem definir els complexos com el conjunt $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ amb les operacions:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

És fàcil comprovar que és un cos commutatiu.
Per la definició que s'ha donat de $\mathbb{C}$ com a parells ordenats, és important fer notar que dos complexos són iguals si i només si ho són els seus dos components

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a = a' \text{ i } b = b'.$$

Podem destacar-ne els següents elements algebraicament distingits:

- Element neutre de la suma: $(0, 0)$.
- Element neutre del producte: $(1, 0)$.
- Element oposat de (a, b): $-(a, b) = (-a, -b)$.
- Element invers de (a, b): $\dfrac{1}{(a, b)} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, definit per a tot parell

diferent de $(0, 0)$.
També és senzill comprovar que identificant qualsevol nombre real a amb el parell $(a, 0)$, els nombres reals queden "submergits" en el conjunt $\mathbb{C}$. Només cal anul·lar el segon component i comprovar que les operacions definides abans coincideixen amb la suma i el producte ordinaris de nombres reals. D'ara endavant si a és un nombre real utilitzarem indistintament la notació a o el parell $(a, 0)$.
Si posem $i = (0, 1)$, és immediat comprovar que $i^2 = -1$ i clarament tenim:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$$

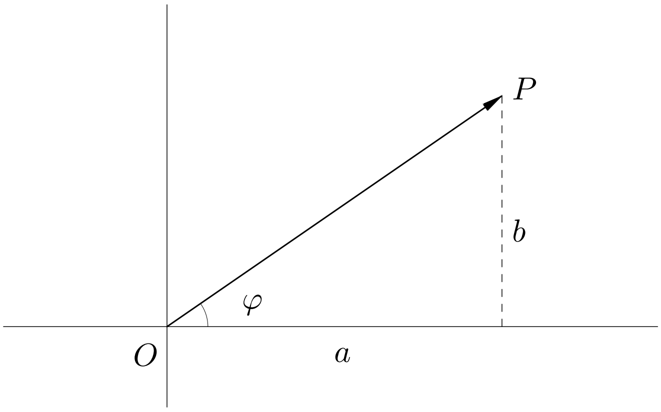
que és l'anomenada forma binòmica d'un nombre complex.
És habitual dir part real al primer component del parell (a, b) i al segon dir-ne part imaginària.
Els complexos que tenen part real nul·la s'anomenen imaginaris purs. En particular $i = (0, 1)$ s'anomena unitat imaginària. Com que $i^2 = -1$, des d'un punt de vista formal podem posar $i = \sqrt{-1}$.
Quan no sigui indispensable d'explicitar les parts real i imaginària d'un complex el designarem simplement z i indicarem respectivament per $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{Im}(z)$ les seves parts real i imaginària.

Definició. Donat un complex $z = a + bi$, definim el conjugat de z i el designem per $\bar{z}$, el complex $a - bi$.
Són de comprovació immediata les propietats següents:

$$\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \; (z' \neq 0), \quad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Interpretació geomètrica. Mòdul i argument d'un nombre complex.

Si representem el parell ordenat (a, b) sobre el pla de la manera usual (el primer component a l'eix horitzontal i el segon al vertical), obtenim, per a cada complex, un punt que anomenem afix del complex. Quan no hi hagi possibilitat de confusió identificarem punt i nombre complex. Del pla així conformat se'n diu pla complex; de l'eix horitzontal se'n sol dir eix real i del vertical, imaginari.



Si tracem el vector amb origen a l'origen O de coordenades i extrem a l'afix P de $z = (a, b)$, i anomenant φ l'angle format per la part positiva de l'eix real i el vector $\overrightarrow{OP}$, tenim les relacions següents:

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\varphi = b/a$$

$$a = \overline{OP}\cos\varphi \qquad b = \overline{OP}\sin\varphi$$

El nombre real positiu que mesura la distància de O a P $(\overline{OP})$ s'anomena mòdul del complex z i es representa per $|z|$. L'angle φ està determinat pel parell $(a, b) \neq (0, 0)$ llevat d'un múltiple de 2π; per això diem que φ és *un argument* de z i escriurem $\arg(z)$. Si volem determinar un únic argument per a z, només cal restringir φ a un interval semiobert de longitud 2π que normalment és $[0, 2\pi)$.
Amb aquestes definicions i notacions, les relacions anteriors queden així:

$$(1) \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$(2) \qquad a = |z|\cos\varphi, \qquad b = |z|\sin\varphi.$$

Tenint present que la imatge geomètrica de la conjugació és una simetria respecte l'eix real i que $|z|$ és una distància, són esperables les propietats següents la demostració de les quals es proposa com exercici.

Exercici 1. $z\bar{z} = |z|^2$.

Exercici 2. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

Exercici 3. $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$.

Exercici 4. $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

Exercici 5. $|\bar{z}| = |z|$.

Exercici 6. $|zz'| = |z||z'|$.

Exercici 7. Si $z' \neq 0$, llavors $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Exercici 8. Si $zz' = 0$, llavors $z = 0$ o bé $z' = 0$. (Aquesta propietat es pot enunciar equivalentment: Si $zz' = 0$ i $z \neq 0$, llavors $z' = 0$.)

Exercici 9. $|z| = 1$ si i només si $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$.

Exercici 10. Desigualtat triangular: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Quan es compleix la igualtat?

Forma trigonomètrica d'un complex

Per simplificar la notació posem $r = |z|$, $r' = |z'|$ i siguin $\varphi = \arg(z)$, $\varphi' = \arg(z')$. Per (2), tenim

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3}$$

Aquesta manera de representar un nombre complex s'anomena diu forma trigonomètrica i és especialment útil a l'hora de multiplicar dos complexos.
En efecte, siguin els complexos $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Calculem el producte zz'

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \\ &= rr'\big(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')\big) = \\ &= rr'\big(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\big). \end{aligned} \tag{4}$$

L'expressió (4) ens indica que en multiplicar dos complexos es multipliquen els seus mòduls i se sumen els seus arguments.
Posant $z = z'$ a (4), resulta

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

i reiterant el procés n vegades queda

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{5}$$

coneguda con la fórmula de Moivre.

Com que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ i $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, resulta

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big).$$

Ara podem estendre (4) al quocient i (5) a exponents negatius.

$$\frac{z}{z'} = z\frac{1}{z'} = \frac{r}{r'}\big(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')\big)$$

i si $n \geq 0$, llavors

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

Raons trigonomètriques d'angles múltiples

Sigui z un complex de mòdul 1 i argument φ. Si calculem z^n mitjançant (5) i pel binomi de Newton, desenvolupem, i separem les parts real i imaginària obtenim

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi = \binom{n}{0}\cos^n\varphi + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi i\sin\varphi + \cdots + \binom{n}{n} i^n\sin^n\varphi$$

i tenint present que $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, resulta

$$\cos n\varphi = \binom{n}{0}\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots \pm \binom{n}{p}\cos^{n-p}\varphi\sin^p\varphi$$
$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots \pm \binom{n}{q}\cos^{n-q}\varphi\sin^q\varphi$$

on si n és parell, $p = n$, $q = n-1$ i si n és imparell, $p = n-1$, $q = n$.

Per exemple per a $n = 5$, resulta:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

i d'aquestes se'n dedueix:

$$\tan 5\varphi = \frac{5\tan\varphi - 10\tan^3\varphi + \tan^5\varphi}{1 - 10\tan^2\varphi + 5\tan^4\varphi}.$$

El fet d'expressar $\cos n\varphi$ com un polinomi en $\cos\varphi$ condueix a igualtats interessants entre raons trigonomètriques amb arguments expressats mitjançant un nombre enter de graus.

Per exemple si a l'expressió anterior de $\cos 5\varphi$, escrivim les potències parelles de $\sin\varphi$ en funció de $\cos\varphi$, queda:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\big(1-\cos^2\varphi\big) + 5\cos\varphi\big(1-\cos^2\varphi\big)^2 = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$$

posant $x = \cos\varphi$ i $p = \cos 5\varphi$ resulta l'equació

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - p = 0$$

les cinc arrels de la qual són,

$$\cos\varphi, \quad \cos\big(\varphi + 72^\circ\big), \quad \cos\big(\varphi + 144^\circ\big), \quad \cos\big(\varphi + 216^\circ\big), \quad \cos\big(\varphi + 288^\circ\big).$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta a l'equació polinòmica anterior, el producte de les arrels val

$$\cos\varphi\cos\big(\varphi+72^\circ\big)\cos\big(\varphi+144^\circ\big)\cos\big(\varphi+216^\circ\big)\cos\big(\varphi+288^\circ\big) = \frac{\cos 5\varphi}{16}.$$

Particularitzant per a qualsevol valor de φ i reduint els angles a l'interval $\big[0, 180^\circ\big]$ s'obtenen curioses igualtats:
Per a $\varphi = 9^\circ \Longrightarrow \cos 9^\circ\cos 63^\circ\cos 81^\circ\cos 153^\circ = -\dfrac{1}{16}$.
Per a $\varphi = 12^\circ \Longrightarrow \cos 12^\circ\cos 84^\circ\cos 132^\circ\cos 156^\circ = \dfrac{1}{16}$.

NC1. Proveu les igualtats següents:
a) $4\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ = \cos 30^\circ$.
b) $4\sin 1^\circ\sin 59^\circ\sin 61^\circ = \sin 3^\circ$.
(*Indicació.* Expresseu $\cos 3x$ en funció de $\cos x$ i utilitzeu les fórmules de Cardano-Vieta.)

NC2. Proveu les igualtats següents:
a) $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = 4$.
b) $\tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\tan 60^\circ$.
c) $\tan 25^\circ\tan 35^\circ\tan 85^\circ = \tan 75^\circ$.
(*Indicació.* Expresseu $\tan 3x$ en funció de $\tan x$ i utilitzeu les fórmules de Cardano-Vieta.)

Sempre és possible expressar $\cos n\varphi$ en funció únicament de $\cos\varphi$ utilitzant dos mètodes diferents: El primer consisteix a posar $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ a

$$\cos n\varphi = \binom{n}{0}\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots \pm \binom{n}{p}\cos^{n-p}\varphi\sin^p\varphi$$

i com que totes les potències de $\sin\varphi$ són parelles s'arriba al resultat desitjat.
El segon mètode consisteix a procedir per recurrència i això ens porta a uns polinomis amb propietats interessants anomenats polinomis de Chebyshev i que no són d'altres que els que resulten d'expressar $\cos n\varphi$ en funció de $\cos\varphi$ i els designarem per T_n.
D'acord amb la notació habitual de polinomis posarem $x = \cos\varphi$ (el que suposa imposar a x la condició $-1 \le x \le 1$). Llavors pel que hem abans es pot escriure:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

D'altra banda, la igualtat trigonomètrica

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi \cos n\varphi$$

es pot escriure en termes dels T_n com

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

relació que, en principi, només és vàlida per a $-1 \le x \le 1$, però sent els $T_k(x)$ polinomis, ho és per a tot x.
Per tant la relació recurrent:

$$T_1(x) = x, \qquad\qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

ens permet calcular els polinomis de Chebyshev.
De tot l'anterior es dedueixen algunes propietats de demostració senzilla, com és ara:

- Tots els coeficients de $T_n(x)$ són enters i el coeficient de x^n és 2^{n-1}.
- $T_n(x)$ té n arrels reals en l'interval $[-1, 1]$.
- Els extrems de $T_n(x)$ a $[-1, 1]$ són -1 i $+1$.

La primera és conseqüència de la relació de recurrència i les altres dues s'obtenen fàcilment a partir de les relacions $x = \cos\varphi$ i $T_n(x) = \cos n\varphi$. En efecte, com que $T_n(x)$ té grau n i $\cos n\varphi = 0$ s'anul·la pels n valors

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

de l'interval $[-1, 1]$, podem factoritzar T_n en la forma

$$T_n(x) = 2^{n-1}\Big(x - \cos\frac{\pi}{2n}\Big)\Big(x - \cos\frac{3\pi}{2n}\Big)\cdots\Big(x - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\Big)$$

i les dues últimes propietats són immediates.

Exercici 11. És sempre possible expressar $\sin n\varphi$ en funció exclusivament de $\sin\varphi$? (*Indicació.* Distingiu entre n parell i senar.)

Arrels n-èsimes d'un nombre complex

Donat un complex $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ busquem tots els complexos $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ tals que $\big(z'\big)^n = z$.

Utilitzant la fórmula de Moivre, resulta

$$\big(r'\big)^n(\cos n\varphi' + i\sin n\varphi') = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

i com que els mòduls han de ser iguals i els arguments han de diferir en un múltiple de 2π, queda

$$r' = \sqrt[n]{r}, \qquad\qquad n\varphi' = \varphi + 2k\pi.$$

Hi ha exactament n arguments diferents, corresponents al valors $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Resumint,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Òbviament en la representació geomètrica, els afixos corresponents a les arrels n-èsimes d'un complex donat z són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats centrat a l'origen.

Fent a la fórmula anterior $r = 1$ i $\varphi = 0$, obtenim els n complexos u_k donats per:

$$u_k = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k \;\; \text{essent } \varphi_k = \frac{2k\pi}{n}, \;\; k = 0, 1, \dots, n-1$$

que són les n arrels n-èsimes de la unitat. Sobre el pla complex es representen en els vèrtexs d'un n-àgon regular inscrit a la circumferència unitat.

L'estructura del conjunt $U_n = \big\{u_k \;\big|\; (u_k)^n = 1\big\}$ de les arrels n-èsimes de la unitat és especialment interessant degut a la següent propietat:

Si multipliquem una arrel n-èsima qualsevol z' de z per una arrel n-èsima de la unitat s'obté una altra arrel n-èsima de z.

En efecte , si $\big(z'\big)^n = z$, llavors $\big(z'u_k\big)^n = \big(z'\big)^n(u_k)^n = \big(z'\big)^n 1 = z$.

Per tant, en multiplicar una arrel qualsevol z' per tots els elements de U_n s'obtenen totes les arrels n-èsimes de z.

En multiplicar elements de U_n el resultat pertany a U_n, en particular qualsevol potència d'un element de U_n també pertany a U_n ja que $\big((u_k)^p\big)^n = \big((u_k)^n\big)^p = 1^p = 1$.

Arrels primitives de la unitat. Polinomis ciclotòmics.

Sigui u_k un element de U_n i considerem el conjunt de les n primeres potències de u_k

$$V_k = \{u_k, u_k^2, \dots, u_k^n\}.$$

Les arrels u_k tals que $V_k = U_n$ s'anomenen arrels primitives de la unitat.

Exercici 12. Per a un n donat, proveu que u_k és arrel primitiva si i només si k i n són primers entre ells.

Si n és primer, aleshores totes les arrels n-èsimes de 1 són primitives, llevat del propi 1. Si n no és primer, el nombre d'arrels primitives coincideix amb el nombre de nombres primers amb n i més petits que n que es designa per $\varphi(n)$.
Si designem per u_1, u_2, ... ,$u_{\varphi(n)}$ el conjunt de les arrels primitives per a un n donat, definim el polinomi

$$\Phi_n(z) = (z - u_1)(z - u_2)\cdots(z - u_{\varphi(n)})$$

Aquest polinomi de grau $\varphi(n)$ s'anomena *polinomi ciclotòmic* d'ordre n i té una gran importància en el següent problema clàssic de geometria: Per a quins valors de n és possible construir amb regle i compàs un polígon regular de n costats? La resposta és que un tal polígon és constructible amb regle i compàs si i només si l'equació ciclotòmica corresponent $\Phi_n(z) = 0$ és resoluble per radicals de segon grau, és a dir si les arrels de l'equació poden expressar-se usant radicals quadràtics.[2]
Els polinomis $\Phi_n(z)$ poden calcular-se recurrentment ja que totes les arrels n-èsimes de la unitat compleixen l'equació

$$z^n - 1 = 0. \tag{6}$$

Separant l'arrel $z = 1$, queda

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1. \tag{7}$$

[2] Gauss provà als 19 anys que això és possible per als valors de n tals que els seus factors primers imparells són "primers de Fermat" diferents entre ells i només per a aquests valors. Un nombre s'anomena primer de Fermat quan és un primer del tipus: $F_k = 2^{2^k} + 1$ per a algun k. Els únics primers de Fermat que es coneixen són: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$.

Si n és primer, el polinomi (7) coincideix amb $\Phi_n(z)$, i si n no és primer cal separar-ne les arrels no primitives que estan agrupades en els polinomis $\Phi_d(z)$ per als divisors d de n. En aquest cas cal dividir el polinomi (7) pels polinomis $\Phi_d(z)$ amb d divisor de n. Els primers polinomis ciclotòmics són:

$$\begin{aligned}
\Phi_2(z) &= \frac{z^2-1}{z-1} = z+1 \\
\Phi_3(z) &= \frac{z^3-1}{z-1} = z^2+z+1 \\
\Phi_4(z) &= \frac{z^4-1}{(z-1)\Phi_2} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z+1} = z^2+1 \\
\Phi_5(z) &= \frac{z^5-1}{z-1} = z^4+z^3+z^2+z+1 \\
\Phi_6(z) &= \frac{z^6-1}{(z-1)\Phi_2\Phi_3} = \frac{z^5+z^4+z^3+z^2+z+1}{(z+1)\big(z^2+z+1\big)} = z^2-z+1
\end{aligned}$$

NC3. Resoleu l'equació $\Phi_5(z)=0$ i trobeu l'expressió de les quatre arrels amb radicals de segon ordre

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

Solució.
Dividint per z^2 i completant el quadrat de $z+\dfrac{1}{z}$, l'equació es pot posar en la forma:

$$\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^2+\Big(z+\frac{1}{z}\Big)-1=0$$

que resolent-la respecte la incògnita $z+\dfrac{1}{z}$ resulta:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Per facilitar l'escriptura posarem $p=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ i $q=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Finalment resolent les equacions quadràtiques $z^2-pz+1=0$, $z^2-qz+1=0$ s'obtenen les quatre arrels de l'equació inicial:

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i,$$
$$z_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \qquad z_4=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i.$$

Les expressions anteriors confirmen la possibilitat de construir amb regle i compàs el pentàgon regular.

L'exponencial complexa. Fórmula d'Euler.

Sembla natural preguntar-nos què significa e^z si z és un nombre complex. Si $z = a + bi$, llavors haurà de ser

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi}.$$

El primer factor és conegut en ser a un nombre real, i el problema rau a atribuir un valor i un "significat" al segon.
Sembla lògic exigir que sigui quin sigui el valor que li donem, es conservin les propietats formals de les operacions amb potències tals com:

$$(8) \qquad e^{\alpha i+\beta i} = e^{\alpha i}e^{\beta i}, \qquad e^{\alpha i-\beta i} = \frac{e^{\alpha i}}{e^{\beta i}}, \qquad \left(e^{\alpha i}\right)^k = e^{k\alpha i}.$$

Suposem que

$$e^{i\alpha} = a + bi.$$

Suposem també que la igualtat ha de subsistir en canviar i per $-i$

$$e^{-i\alpha} = a - bi.$$

Multiplicant ambdues igualtats resulta $1 = a^2 + b^2$, és a dir que $|e^{i\alpha}| = 1$.
Per tant $e^{i\alpha}$ és un complex de mòdul 1 i ha de tenir la forma $\cos\beta + i\sin\beta$.
Vegem finalment perquè sembla raonable que $\alpha = \beta$
Si $\alpha \to 0$, llavors hem d'esperar que $e^{i\alpha} \to 1$, i això exigeix que $\cos\beta \to 1$ i $\sin\beta \to 0$; és a dir, per a valors "petits" de α, els dos angles α i β han de ser molt semblants.
Si prenem $\alpha = \beta$ és immediat comprovar que es compleixen totes les propietats de (8). En efecte, les dues primeres es converteixen en les conegudes fórmules trigonomètriques del sinus i cosinus d'una suma i d'una diferència d'angles i la tercera és la fórmula de Moivre.
En definitiva podem donar la següent:
Definició.

$$(9) \qquad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

com una definició raonable i motivada.[3]

Si fem $\alpha = \pi$ obtenim la cèlebre igualtat

$$e^{i\pi} - 1 = 0$$

atribuïda a Euler i que relaciona els cinc nombres més “importants” del càlcul, e, i, π, 1 i 0.

Una conseqüència interessant de (9) és la següent:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned}$$

sumant i restant resulta

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \tag{10}$$

Són múltiples els resultats que es deriven de l'aplicació a fórmules trigonomètriques de la definició (9) i la seva conseqüència (10). Vegem-ne unes quantes:

NC4. Demostreu:

a) $\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi$.

b) $\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$.

Solució de l'apartat a).

Per (10), tenim:

$$\begin{aligned} \cos^3\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 &\Longleftrightarrow 2^3\cos^3\varphi = e^{3i\varphi} + 3e^{2i\varphi}e^{-i\varphi} + 3e^{i\varphi}e^{-2i\varphi} + e^{-3i\varphi} = \\ &= 3\big(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\big) + \big(e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi}\big) = 6\cos\varphi + 2\cos 3\varphi \Longleftrightarrow \\ &\qquad \cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi. \end{aligned}$$

L'apartat b) es fa de manera anàloga.

[3] Existeixen més arguments de tipus heurístic per a motivar la definició (9), vegeu per exemple *Calculus* de T. M. Apostol Ed. Reverté, Volum 1 pàgina 447 o *Complex numbers & geometry* de Liang-Shin Hann editat per The Mathematical Association of America, pàgina 38. A la primera referència es fa ús de coneixements molt senzills d'equacions diferencials i a la segona s'utilitza el desenvolupament en sèrie de e^x.

Aquest problema és en certa manera el procés invers dels polinomis de Chebyshev ja que s'expressen les potències de $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ en funció d'arguments múltiples de φ.

Les expressions del tipus

$$\sum_{j=0}^{n}(a_j \cos j\varphi + b_j \sin j\varphi)$$

s'anomenen polinomis trigonomètrics.

El problema 4 es pot generalitzar a qualsevol potència $\sin^n\varphi$ o $\cos^n\varphi$ que de manera sistemàtica pot expressar-se com a polinomi trigonomètric.

NC5. Demostreu:

a) $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cos\dfrac{nx}{2}.$

b) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\sin\dfrac{nx}{2}.$

Solució.

Posem

$$A = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx, \qquad B = \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx.$$

Suposant que $x \neq 2k\pi$,

$$A+iB = 1+e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x}+\cdots+e^{inx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-1}{\cos x+i\sin x-1},$$

utilitzant les identitats $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ i $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ i operant, queda

$$A+iB = \frac{-2\sin^2\dfrac{(n+1)x}{2}+2i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{-2\sin^2\dfrac{x}{2}+2i\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}+i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Multiplicant pel conjugat de l'últim denominador, resulta

$$A + iB = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\cos\dfrac{(n+1)x}{2} + i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\left(\cos\dfrac{x}{2} - i\sin\dfrac{x}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{x}{2} + \sin^2\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} e^{\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} e^{\frac{nx}{2}} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Igualant les parts real i imaginària s'obté el resultat.

El punt de vista geomètric

A continuació volem interpretar les operacions definides en els complexos des del punt de vista de la seva representació gràfica en l'anomenat pla complex (o d'Argand).

Siguin $u = a + ib$, $z = x + iy$ dos complexos d'afixos P i Q respectivament. Sigui R l'afix de $u + z$. Tenim $u + z = a + x + (b + y)i$ que en el pla complex representa una translació de vector (a, b) com es mostra clarament a la figura de la dreta. Totes les propietats algebraiques de la suma de complexos es corresponen amb les mateixes propietats de la suma de vectors lliures en el pla.

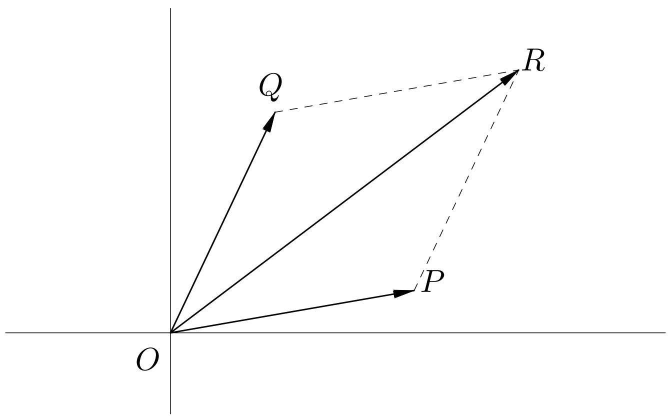


Figura 2

Per veure la imatge gràfica del producte posem

$$\alpha = \arg(u), \qquad \beta = \arg(z)$$

i designem per A i R els afixos de 1 i zu respectivament.

Com que $\arg(zu) = \alpha + \beta$ i $|zu| = |z||u|$, els triangles OAP i OQR són semblants amb raó de semblança (Figura 3)

$$r = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{|z|}{|u|}.$$

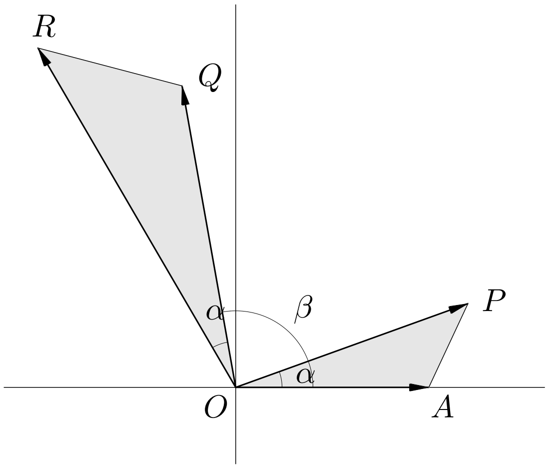


Figura 3

Si fixem u, el pas de Q a R consisteix en un gir d'angle α i centre O seguit d'una homotècia de centre O i raó r. Les dues transformacions (gir i homotècia) commuten i la transformació resultant és una semblança directa que a vegades s'anomena, d'una manera més descriptiva, rotació dilativa de centre O, amplitud α i raó r.

És interessant destacar-ne alguns casos particulars

- Si u és real, llavors $\alpha = 0$ i la transformació és l'homotècia de raó a.
- Si $|u| = 1$, llavors la transformació es redueix a un gir d'amplitud α. En particular un gir de $90°$ entorn l'origen equival a multiplicar per i.
- Si $u = -1$, la transformació és una simetria central entorn a O.[4]

Aquesta relació estreta entre transformacions geomètriques i operacions amb complexos fa

[4] Aquí es pot fer una petita digressió sobre per què es representen els complexos en un pla cartesià utilitzant l'eix OY per als imaginaris purs. Si interpretem en la recta real el producte de dos reals, un fix a i un altre variable b, el producte ab és la imatge de b en l'homotècia (o dilatació) de raó a. En particular el propi a és la imatge de 1 en la dilatació que defineix a. En general podem preguntar-nos per la transformació "arrel" d'una transformació donada com aquella que multiplicada per si mateixa (aplicada dues vegades en el sentit de la composició de funcions) coincideix amb la transformació inicial. Per exemple, si $a > 0$, la transformació "arrel" és qualsevol de les dilatacions definides per $\pm\sqrt{a}$. Per a $a = -1$, la transformació és un gir de $180°$ entorn l'origen, la seva transformació "arrel"és en aquest cas un gir de $90°$ amb el mateix centre de gir i que porta l'afix de 1 al punt $(0,1)$ que representa la imatge de $i = \sqrt{-1}$.

que, de vegades, un problema de plantejament purament geomètric es resolgui elegantment interpretant-lo al pla complex. Vegem-ne un exemple, amb un problema clàssic.

NC6. *El plànol del tresor.* Disposem d'un plànol per a trobar un tresor amb les següents instruccions:

En el paratge on és el tresor hi ha un pi P i un avet A. Si traslladem tot el terreny (amb el tresor inclòs) de manera que P ocupi la posició de A, a continuació girem $90°$ amb centre P i sentit contrari al de les agulles del rellotge i finalment girem uns altres $90°$ amb centre A i en el mateix sentit, el tresor és en el mateix lloc del començament. Trobeu el tresor.

Solució. Clarament hem de trobar un punt que quedi invariant després de fer les tres transformacions descrites a l'enunciat (una translació i dos girs).

Es pot resoldre geomètricament estudiant la transformació producte però és molt més ràpid resoldre-ho en el pla complex.

En una referència amb origen a P, eix real positiu en la direcció PA i unitat $\frac{1}{2}PA$, sigui z un complex qualsevol. Anem a veure qui és el transformat de z en aplicar-li les tres transformacions de l'enunciat.

Translació de vector $\overrightarrow{PA}$: $z \to z + 2$.
Gir de centre P i amplitud $90°$ (multiplicar per i): $z + 2 \to (z + 2)i$.
Per poder aplicar més fàcilment el segon gir, traslladem l'origen al punt A: $(z + 2)i \to (z + 2)i - 2$
Gir de centre A i amplitud $90°$ (multiplicar per i): $(z + 2)i - 2 \to \big((z + 2)i - 2\big)i$
Ara hem de tornar a dur l'origen al punt P: $\big((z + 2)i - 2\big)i \to \big((z + 2)i - 2\big)i + 2$
Per tal que z sigui invariant per a aquesta successió de moviments, ha de complir:

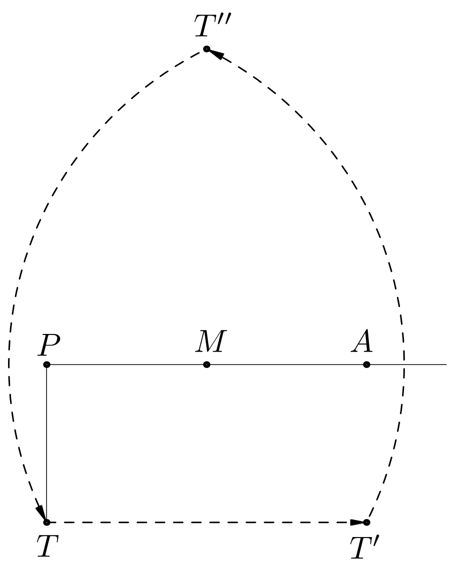


Figura 4

$$\big((z+2)i-2\big)i+2=z$$

equació que té una única solució que és $z=-i$.
La construcció de la solució és immediata, només cal girar $-90°$ amb centre P el punt M que és el punt mitjà del segment PA per trobar la posició del tresor T.
A la figura s'ha comprovat la solució aplicant a T els tres moviments de l'enunciat i observant que es torna al mateix punt.

La conjugació s'interpreta en el pla complex com una simetria axial respecte de l'eix real. La relació entre els afixos de z i $\dfrac{1}{z}$ s'obté fàcilment amb la igualtat:

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

d'on $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=\arg(\bar{z})=-\arg(z)$.

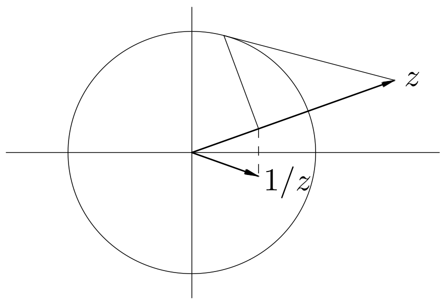


Figura 5

Com que a més a més $\left|\dfrac{1}{z}\right||z|=1$, resulta que l'afix de $\dfrac{1}{z}$ s'obté a partir de l'afix de z mitjantçant una inversió respecte del cercle unitat seguida d'una simetria respecte l'eix real. La construcció geomètrica de l'afix de l'invers es mostra a la figura 5 en el cas que $|z|>1$, si $|z|<1$ es pot invertir el procés ja que l'invers de l'invers de z és el propi z. Si $|z|=1$, llavors l'invers coincideix amb el conjugat.
De manera més general la inversió de pol l'origen i potència $k>0$ equival a la transformació:

$$z\to\frac{k}{\bar{z}}.$$

Exercici 13. Proveu que si z és un complex no nul, llavors els afixos de z, $-z$, $\dfrac{1}{z}$, i $-\dfrac{1}{z}$ estan alineats.

Alguns llocs geomètrics i relacions freqüents en geometria tenen expressions clares en el pla complex, com per exemple:

- El punt mitjà dels afixos A, B de z, z' és l'afix M del complex $\dfrac{z+z'}{2}$.
- La circumferència de centre A afix del complex a i radi r (real positiu), és $|z-a|=r$.
- El lloc geomètric dels punts tals que la raó entre les distàncies a dos punts donats A, B és el nombre real $\lambda>0$. Si a i b són els complexos que tenen per afixos A i B, el lloc demanat és $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=\lambda$. Pot comprovar-se com exercici que es tracta d'una circumferència que té el centre alineat amb A i B. És l'anomenat cercle d'Apoloni (vegeu el problema 40 del final del capítol).
- El baricentre del triangle de vèrtexs els afixos dels complexos z_1, z_2, z_3 és l'afix de $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

NC7. Siguin z i z' complexos amb afixos A i B respectivament. Mantinguem z' fix.
a) Quin és el lloc geomètric de A per tal que els afixos de z, z' i zz' estiguin alineats?
b) Quin és el lloc geomètric de l'afix de zz'?
Solució. Siguin P l'afix de zz' i Q l'afix de 1.

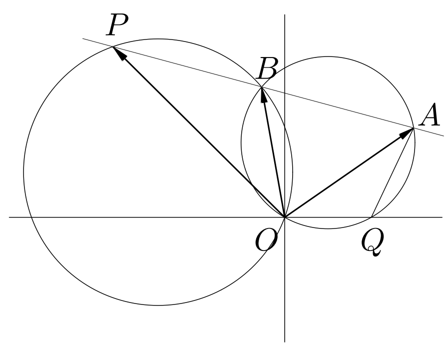


Figura 6

a) Sabem que els triangles OQA i OBP són semblants. Per tant

$$\angle OQA=\angle OBP$$

però $\angle OBA$ és suplementari de $\angle OBP$ en ser A, B i P punts alineats.
En conseqüència

$$\angle OQA+\angle OBA=180^\circ$$

és a dir el quadrilàter $OQAB$ és inscriptible. Com que O, Q i B són fixos, A ha d'estar en el circumcentre del triangle OQB.
b) Quan A es mou en la circumferència OQB, $\angle OAQ$ és constant i per la semblança anterior, $\angle OPB$ també és constant, per tant P està en l'arc capaç d'angle $\angle OAQ$ sobre el segment OB.

Polígons regulars i nombres complexos

Com ja s'ha vist anteriorment, els afixos de les arrels n-èsimes de la unitat formen un polígon regular de n costats inscrit en la circumferència unitat i amb un vèrtex a $(1,0)$. Algunes propietats mètriques curioses d'aquests polígons poden establir-se amb força facilitat utilitzant les propietats dels nombres complexos i dels polinomis.
El conjunt $U_n = \big\{u_k \bigm| (u_k)^n = 1; k = 0,1,\ldots,n-1\big\}$ de les arrels n-èsimes de la unitat té n elements donats per:

$$u_k = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k \quad \text{essent } \varphi_k = \frac{2k\pi}{2},\; k = 0,1,\ldots,n-1$$

i qualsevol d'ells és arrel del polinomi

$$P_n(z) = z^n - 1 = (z-1)\big(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\big)$$

en conseqüència qualsevol arrel z diferent de 1 compleix

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$$

i aplicant les fórmules de Cardano-Vieta a l'equació $z^n - 1 = 0$, resulta

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = 0.$$

NC8. Siguin A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 vèrtexs consecutius d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 1. Proveu que les cordes A_0A_1 i A_0A_2 compleixen

$$\big(\overline{A_0A_1}\cdot\overline{A_0A_2}\big)^2 = 5.$$

Solució 1. Siguin u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 les arrels cinquenes de la unitat i A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 els seus afixos.

Com que $u_0 = 1$, tenim

$$\overline{A_0A_1} = |u_1 - 1|, \qquad \overline{A_0A_2} = |u_2 - 1|$$

llavors

$$\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = |u_1 - 1|^2 |u_2 - 1|^2 = \left|\left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2\right|$$

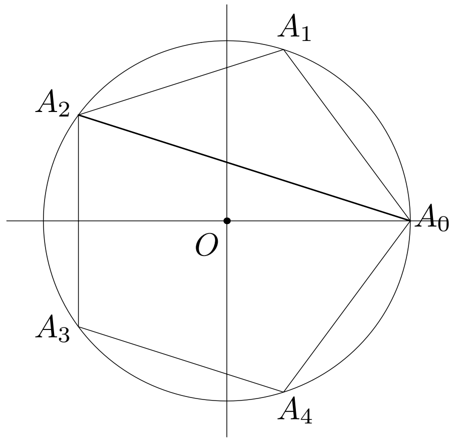


Figura 7

efectuant el producte $\left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2$ i tenint present que

$$u_j u_k = u_h \text{ amb } h = j + k \pmod 5$$

resulta

$$\left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2 = (u_3 - u_1 - u_2 + 1)^2 = -u_4 + 4u_3 - u_2 + u_1 - 1$$

però

$$1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \Longleftrightarrow u_3 = -1 - u_1 - u_2 - u_4$$

i substituint queda

$$\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = \left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2 = |5u_3| = 5|u_3| = 5.$$

Solució 2.

$$P(z) = (z - u_1)(z - u_2)(z - u_3)(z - u_4) = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

fent $z = 1$ resulta $P(1) = 5$.

Però $\overline{A_0A_1} = \overline{A_0A_4}$ i $\overline{A_0A_2} = \overline{A_0A_3}$, per tant $\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = \overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_0A_4}$ i finalment

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_0A_4} = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4) = P(1) = 5.$$

Per descomptat que també es pot resoldre el problema sense utilitzar complexos i no és difícil, però aquesta solució és breu i fàcilment generalitzable (vegeu el problema 32 al final del capítol).

NC9. Donat un polígon regular de n costats inscrit al cercle unitat de vèrtexs A_0, A_1, $\ldots, A_{n-1}$, es considera un punt P qualsevol de la circumferència circumscrita. Demostreu que la suma dels quadrats de les distàncies de P a cada vèrtex val $2n$ independentment de la posició de P.

Solució. A la figura 8 es representa la situació per a 7 costats encara que el raonament es fa en general. Suposem, sense perdre generalitat, que P és a l'arc $A_{n-1}A_0$.

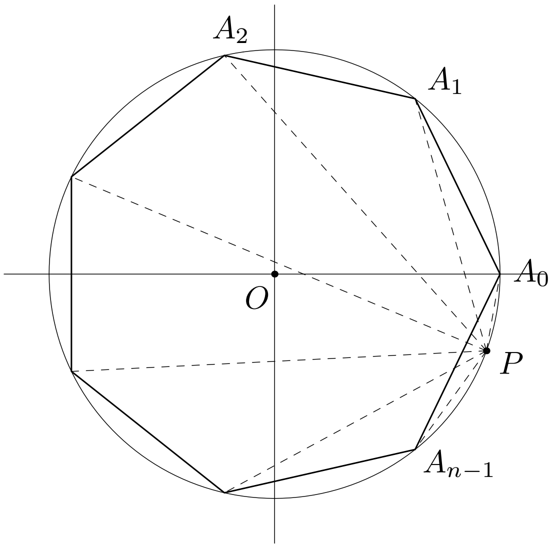


Figura 8

Posem $\alpha = \angle POA_0$ i $\beta = \dfrac{2\pi}{n}$. Sabem que la longitud l d'una corda d'angle central x en una circumferència de radi 1, val

$$l = 2\sin\frac{x}{2}.$$

Per tant, l'expressió que hem d'avaluar és

$$S = \overline{PA}_0^2 + \overline{PA}_1^2 + \overline{PA}_2^2 + \cdots + \overline{PA}_{n-1}^2$$

que segons la igualtat anterior val

$$S = 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big) + \sin^2\Big(\frac{\alpha+2\beta}{2}\Big) + \cdots + \sin^2\Big(\frac{\alpha+(n-1)\beta}{2}\Big)\right)$$

utilitzant la igualtat $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ queda

$$\begin{aligned} S &= 4\Big(\frac{n}{2} - \big(\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)\big)\Big) = \\ &= 2n - 4\big(\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)\big). \end{aligned}$$

Només queda per veure que l'últim parèntesi és nul.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\beta) = \cos\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\beta - \sin\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\sin k\beta$$

i segons el que s'ha provat en el problema 5 resulta

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\beta) = \cos\alpha\frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\cos\frac{(n-1)\beta}{2} - \sin\alpha\frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\frac{(n-1)\beta}{2} = 0$$

ja que en els dos sumands hi ha el factor $\sin\dfrac{n\beta}{2} = \sin\dfrac{2n\pi}{2n} = \sin\pi = 0$.

Problemes

NC10. Proveu que tot complex z de mòdul 1 amb $z \neq -1$ pot escriure's en la forma $\dfrac{1+ia}{1-ia}$ amb $a \in \mathbb{R}$.

NC11. Siguin a, b complexos, amb afixos A i B respectivament. Trobeu el lloc geomètric de l'afix Z del complex z tal que

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k > 0.$$

NC12. Donats n i m naturals, determineu el complex z tal que z^n i z^m són conjugats.

NC13. Demostreu:
a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx = \dfrac{\sin(n+1)x\cos nx}{2\sin x} + \dfrac{n-1}{2}$.
b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots + \sin^2 nx = \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{\sin(n+1)x\cos nx}{2\sin x}$.

NC14. Els punts $A(a,11)$ i $B(b,37)$ determinen juntament amb l'origen de coordenades un triangle equilàter. Determineu el producte ab.

NC15. Es considera en el pla complex la funció $f(z) = -\dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$. Si P és l'afix de z i Q el de $f(z)$, es demana:
a) Proveu que existeixen dos punts fixos de f, és a dir, complexos z tals que $f(z) = z$.
b) Siguin A i B els afixos dels punts trobats en l'apartat anterior. Proveu que per a tot $z \neq 0$, P, Q, A i B són concíclics.

NC16. Proveu que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$ implica $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$.

NC17. Si a és una arrel setena de la unitat diferent de 1, calculeu el valor de

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{a^2}{1+a^4} + \frac{a^3}{1+a^6}.$$

NC18. Determineu tots els complexos z tals que $2z = z_1 + z_2$, on z_1 i z_2 són dues arrels cúbiques diferents de z.

NC19. Proveu les següents igualtats:
a) $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{4} - \cdots = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$.
b) $\dbinom{n}{1} - \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{5} - \cdots = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

NC20. Trobeu els mínims valors de m i n enters positius tals que

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^m = \left(1-i\right)^n.$$

NC21. El complex z compleix $z + \bar{z} = |z|^2$ i k és un nombre real amb $0 < k < 1$. Quin és el lloc geomètric de l'afix de $z + k\bar{z}$?

NC22. Representeu en el pla els afixos dels complexos que compleixen:
a) $z - \bar{z} = i$.
b) $|z - i| = |z + i|$.
c) $|2z + 3| < 1$.
d) $|z + 1| < |z - 1|$.
e) $|z| < |2z + 1|$.

NC23. Proveu que si $z = x + iy$ amb $y > 0$, llavors $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1$.

NC24. Trobeu tots els complexos que compleixen $\bar{z} = z^3$.

NC25. En el pla complex $2 + i$ és el centre d'un quadrat i $5 + 5i$ n'és un vèrtex, Calculeu-ne els altres vèrtexs.

NC26. Si z, z' són nombres complexos, demostreu que si $|z + z'| = |z - z'|$,aleshores $\dfrac{iz}{z'}$ és real.

NC27. Es consideren en el pla els conjunts de nombres complexos

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg\big(z - (2+3i)\big) = \frac{\pi}{4} \right\}, \qquad B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \big|z - (2+i)\big| < 2 \right\}.$$

Trobeu la projecció ortogonal sobre l'eix real de $A \cap B$.

NC28. Demostreu que l'equació $z^4 + 4(1+i)z + 1 = 0$ té una arrel a cada quadrant del pla complex.

NC29. Donades les equacions amb coeficients complexos

$$x^2 - sx + p = 0, \qquad x^2 - s'x + p' = 0,$$

trobeu les condicions que han de complir els coeficients per tal que les arrels siguin els vèrtexs d'un quadrat essent les de cada equació vèrtexs oposats.

NC30. Definim la successió de nombres complexos $\{a_n\}$, $n > 1$, per

$$a_n = (1+i)\Big(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\cdots\Big(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\Big)$$

Estudieu si existeix un nombre natural m tal que

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1990.$$

NC31. Trobeu les condicions que han de complir a i b reals per tal que el sistema

$$\begin{cases} \cos x \;+\; \cos y \;=\; a \\ \sin x \;+\; \sin y \;=\; b \end{cases}$$

admeti solució en $\mathbb{R}$. Resoleu-lo i doneu les expressions de x i y en funció de a i b. (*Indicació:* És una generalització del problema 33.)

NC32. Siguin A_0, A_1, ... ,A_{n-1} vèrtexs consecutius d'un n-àgon regular inscrit en una circumferència de radi 1. Proveu que les cordes A_0A_1, A_0A_2, ... ,A_0A_{n-1} compleixen:

$$\overline{A_0A}_1 \cdot \overline{A_0A}_2 \cdots \overline{A_0A}_{n-1} = n.$$

NC33. Sigui z un complex no nul tal que $z + \dfrac{1}{z} = 1$. Calculeu $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

NC34. Sigui z un complex no nul.

a) Proveu que

$$2\Big|z+\frac{1}{z}\Big| = |z-i|\Big|i-\frac{1}{z}\Big| + \Big|i+\frac{1}{z}\Big||z+i|.$$

b) Proveu que els afixos de z, $-\dfrac{1}{z}$, i, $-i$ són concíclics.

NC35. Trobeu les condicions que han de complir a i b reals per tal que el sistema

$$\begin{cases} 2\cos x \;+\; 3\cos y \;=\; a \\ 2\sin x \;+\; 3\sin y \;=\; b \end{cases}$$

admeti solucions a $\mathbb{R}$. Resoleu-lo donant les expressions de x i y en funció de a i b. (*Indicació.* És una generalització del problema 33.)

NC36. Si z és una arrel n-èsima de la unitat, trobeu tots els possibles valors de

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^{n-1}}.$$

NC37. Donat un polígon regular de n costats inscrit en el cercle unitat i de vèrtexs A_0, A_1, ..., A_{n-1}, es considera un punt P qualsevol del pla. Demostreu que la suma dels quadrats de les distàncies de P a cada vèrtex només depèn de la distància d de P al centre de la circumferència.
(*Indicació:* És una extensió del problema 11.)

NC38. El mateix enunciat del problema anterior però traient la restricció que P pertany al pla del polígon.

NC39. Proveu que els afixos dels complexos u, v, w formen un triangle equilàter si i només si

$$u^2+v^2+w^2=uv+uw+vw.$$

NC40. Siguin a i λ nombres reals positius, α un nombre real de l'interval $[0,2\pi)$, Discutiu el sistema

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-ai}{z-a}\right|=\lambda \\ \arg(z)=\alpha \end{cases}$$

en el camp complex.

Mostra de solucions

Solució del problema NC18

Anomenen z_3 la tercera arrel cúbica de z. Com que z_1, z_2 i z_3 són arrels de l'equació $x^3-z=0$, per les fórmules de Cardano-Vieta sabem que

$$z_1+z_2+z_3=0 \Longleftrightarrow z_1+z_2=-z_3$$

llavors, l'equació inicial queda

$$2z=-z_3$$

elevant al cub i operant resulta

$$8z^3 = -z \Longleftrightarrow z\big(8z^2+1\big) = 0$$

equació que té les tres solucions

$$z = 0, \qquad z = \frac{\sqrt{2}}{4}i, \qquad z = -\frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

Solució del problema NC31

Multiplicant la segona equació per i i sumant queda $z_1 + z_2 = z$ on $z_1 = \cos x + i\sin x$, $z_2 = \cos y + i\sin y$, $z = a + bi$.

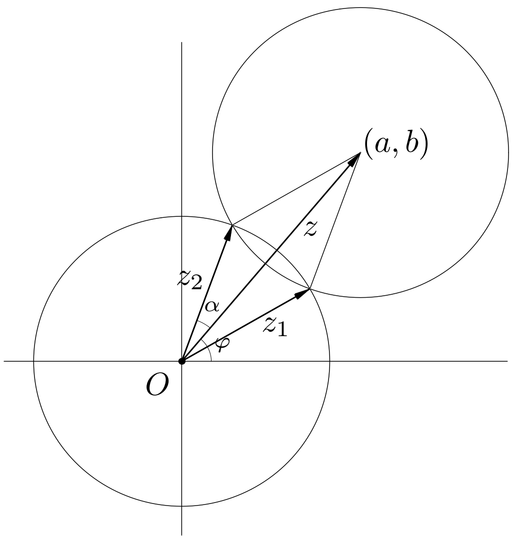


Figura 9

El sistema queda reduït a l'equació en nombres complexos $z_1 + z_2 = z$ sent z_1 i z_2 les incògnites amb la condició $|z_1| = |z_2| = 1$.
El sistema tindrà solució si i només si es pot construir un triangle de costats 1, 1 i $\sqrt{a^2+b^2}$.
Per tant la condició és

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq 2.$$

La solució és (vegeu la figura)

$$z_1 = \cos(\varphi - \alpha) + i\sin(\varphi - \alpha)$$

$$z_2 = \cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)$$

on $\varphi = \arg(z) = \arctan\dfrac{b}{a} = \arccos\Big(\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big)$.
Llavors la solució del sistema inicial és

$$
\begin{aligned}
x &= \arctan\frac{b}{a} - \arccos\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big) + 2k\pi\\
y &= \arctan\frac{b}{a} + \arccos\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big) + 2k\pi.
\end{aligned}
$$

Referències

Apostol, T. M., *Calculus*, Ed. Reverté

Birkhoff, G. i McLane, S., *Àlgebra moderna*, Ed. Vicens Vives

Spivak, Michael, *Calculus. Calculo infinitesimal*, Ed. Reverté

Coxeter, H. S. M, *Fundamentos de geometria*, Ed. Limusa-Wiley

Queysanne, Michel, *Álgebra básica*, Ed. Vicens Vives

Liang-Shin Hann, *Complex numbers & Geometry*, The Mathematical Association of America

RECURRÈNCIES

Josep M. Brunat i Blay

1. Introducció

Representarem per $\mathbb{C}$ el conjunt dels nombres complexos i per $\mathbb{N}$ el conjunt dels nombres naturals. Depenent de les circumstàncies o de la conveniència, es considera que el primer nombre natural és 0 ò 1. En les discussions teòriques nosaltres suposarem que és 1, però en alguns exemples i problemes serà convenient prendre el 0 com a primer natural.
Una *successió* a de nombres complexos és una aplicació

$$a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

La imatge d'un natural n es diu el n-è terme de la successió i es representa per a_n. La tradició fa que sovint una successió no es representi per una sola lletra com a, sinó per formes com (a_n) ò a_n. Això té un cert grau d'ambigüitat però, tot i així, seguirem la tradició i posarem a_n per denotar tant la successió a com el n-è terme de la successió a. El context aclarirà si parlem del terme o de la successió.
Essencialment, doncs, una successió fa correspondre a cada natural n un nombre complex, el que ocupa la posició n a la successió.

La forma més natural de definir una successió és indicar quin a_n correspon a cada n mitjançant una fórmula *explícita.* Per exemple,

$$a_n = \frac{2}{3}\,2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

defineix una successió. Per calcular un terme només hem de substituir n pel valor corresponent, per exemple,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_5 = 21.$$

Però hi ha altres formes de definir una successió. Una de les més importants és mitjançant una *recurrència.* Aquest mètode consisteix en donar uns quants termes inicials, diguem k, i després indicar com es calcula cada terme a partir dels k anteriors. Els termes inicials donats es diuen *condicions inicials* i la fórmula per calcular un terme a partir dels k anteriors es diu *recurrència* d'*ordre* k. Per exemple,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3),$$

defineix una successió mitjançant les condicions inicials $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ i la recurrència $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, que és d'ordre 2. Els dos primers termes estan donats i la recurrència permet calcular cada terme a partir dels dos anteriors:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 5, \quad a_4 = a_3 + 2a_2 = 5 + 6 = 11, \quad a_5 = a_4 + 2a_3 = 11 + 10 = 21, \quad \text{etc.}$$

Noteu que, amb aquesta definició, per calcular a_n hem de calcular prèviament tots els termes anteriors, cosa que no passa amb una definició explícita.

El problema que tractarem és el següent: definida una successió de forma recurrent, trobar la seva forma explícita. Per exemple, la successió a_n definida per

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3), \tag{1}$$

és la successió

$$a_n = \frac{2}{3}\, 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n. \tag{2}$$

Demostració: Les condicions inicials i la recurrència defineixen una única successió. Per tant, si la successió (2) compleix les condicions inicials i la recurrència de (1), aleshores és la successió definida a (1). Substituint a (2) n per 1 i 2 obtenim $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, que són les condicions inicials. Per $n \geq 3$ tenim,

$$\begin{aligned} a_{n-1} + 2a_{n-2} &= \frac{2}{3}\, 2^{n-1} + \frac{1}{3}(-1)^{n-1} + 2\left(\frac{2}{3}\, 2^{n-2} + \frac{1}{3}(-1)^{n-2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) 2^n + \left(\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}\right)(-1)^{n-2} \\ &= \frac{2}{3}\, 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = a_n \end{aligned}$$

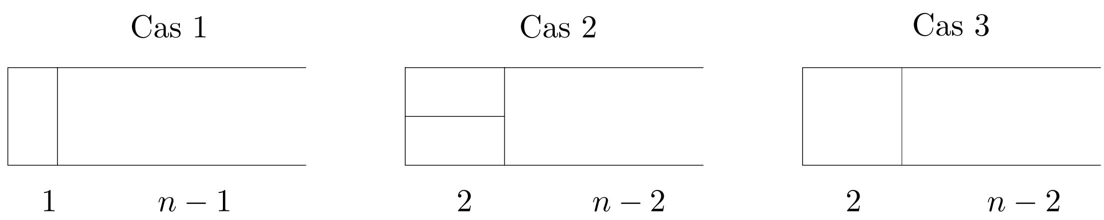
i es compleix la recurrència.

El raonament anterior no és massa satisfactori: tenim la recurrència, per art de màgia ens traiem una fórmula de la màniga i anunciem que és la solució. I, en efecte, ho és: ho hem demostrat. Des del punt de vista lògic, l'argument és impecable. Ara bé, ens agradaria saber com s'ha arribat a la fórmula en qüestió. D'això tractarem.

Un dels aspectes essencials de la *combinatòria* és comptar, i les recurrències són una eina important per a comptar. Molts dels problemes que plantejarem són problemes en què cal comptar coses depenent de un cert natural n i la forma de fer–ho és plantejar una recurrència. Posem-ne un exemple.

Problema 1. Calculeu de quantes formes diferents es pot enrajolar un passadís rectangular de mides $2 \times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i 2×2 i no es poden trencar rajoles.

Solució. Sigui a_n el nombre demanat. Podem començar a enrajolar de tres formes diferents:



En el primer cas, queda per enrajolar un passadís $2 \times (n-1)$, que es pot fer de a_{n-1} formes diferents. En els altres dos casos queda per enrajolar un passadís $2 \times (n-2)$, que es pot fer de a_{n-2} formes diferents. Per tant,

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Clarament $a_1 = 1$ i $a_2 = 3$. Ja hem vist abans que aquestes condicions inicials i la recurrència defineixen la successió

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n. \quad \square$$

En aquesta mena de problemes combinatoris, els a_n sempre són enters. Tanmateix, per a la discussió teòrica convé admetre que els nombres que apareixen puguin ésser complexos. A més, les recurrències són útils en altres contextos, com trobar fórmules per sumes en les que el nombre de sumands depèn de n, en problemes econòmics, en problemes de complexitat algorísmica i d'altres. En aquests casos no sempre els termes de les successions són enters i les tècniques que veurem s'hi poden aplicar igualment.

En la part teòrica, primer estudiarem les *recurrències lineals homogènies amb coeficients constants,* que són les de la forma

$$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0 \quad (n \geq k+1),$$

per certes constants $c_1, \ldots, c_k$, és a dir, aquelles en què cada terme s'obté dels k anteriors multiplicant-los per constants i sumant. El mot *homogènies* prové del zero del segon terme de la igualtat. Primer veurem amb detall els casos $k=1$ i $k=2$. Un exemple important amb $k=2$ és el dels *nombres de Fibonacci,* que comentarem breument. Després considerarem el cas general, amb k arbitrari, però sense detalls, només per deixar constància que el mètode es pot generalitzar. Finalment, veurem com, per certes funcions $f(n)$, es poden resoldre recurrències de la forma

$$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k+1),$$

és a dir, no homogènies. L'apartat titulat *Altres mètodes* és menys sistemàtic. Recull tècniques i observacions diverses, que poden ésser útils per recurrències lineals i no lineals. Acabarem la part teòrica amb comentaris bibliogràfics.

Després hi ha els els enunciats dels problemes. Advertim que no estan ordenats per grau de dificultat. Tampoc pel mètode a emprar, entre d'altres motius perquè n'hi ha que admeten mètodes de solució diferents. No sempre el mètode sistemàtic és el més curt, així que paga la pena pensar una mica abans de posar–se a calcular. Hi ha també indicacions i solucions d'uns quants problemes.

Cal dir que hi ha tota una teoria, la de les *funcions generadores,* que combina àlgebra i combinatòria i que s'aplica particularment bé a les recurrències. Als llibres que citem a la bibliografia s'estudia aquesta teoria amb més o menys aprofundiment segons els casos. Aquí, però, no la tractem i tots els problemes que proposem es poden resoldre sense el recurs d'aquesta teoria.

2. Recurrències lineals homogènies d'ordre 1 i 2

Les recurrències lineals d'ordre 1 s'anomenen *progressions geomètriques.* Són successions en què cada terme a_n s'obté de l'anterior multiplicant–lo per una constant:

$$a_n - c_1 a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2).$$

La solució és molt fàcil.

Teorema 1. *Sigui* $c_1 \neq 0$. *Les successions* a_n *que compleixen*

$$a_n - c_1 a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2)$$

són les de la forma

$$a_n = A c_1^n$$

on A *és una constant determinada per* a_1.

Demostració. Comprovem primer que, per tota constant A, la successió $a_n = A c_1^n$ compleix la recurrència:

$$a_n - c_1 a_{n-1} = A c_1^n - c_1 A c_1^{n-1} = A c_1^n - A c_1^n = 0.$$

Sigui ara a_n tal que compleixi la recurrència. Si trobem A de forma que $a_1 = A c_1$, és a dir, prenent $A = a_1/c_1$ (noteu que $c_1 \neq 0$), aleshores la successió $b_n = A c_1^n$ compleix la recurrència i té el mateix valor inicial que a_n. Per tant,

$$a_n = b_n = A c_1^n. \quad \square$$

El polinomi $x - c_1$ s'anomena *polinomi característic* de la recurrència $a_n - c_1 a_{n-1} = 0$. El conjunt de successions a_n que compleixen una recurrència formen la *solució general* de la recurrència. El teorema anterior diu que la solució general de la recurrència $a_n - c_1 a_{n-1} = 0$ està formada per les successions de la forma

$$a_n = A c_1^n,$$

amb A constant. Si coneixem el valor inicial a_1, podem determinar A i obtenir la fórmula explícita de la successió.

Problema 2. $a_1 = 2$, $a_n - 3a_{n-1} = 0$ $(n \geq 2)$.

Solució. La solució general de la recurrència és $a_n = A \cdot 3^n$. Ara, $2 = a_1 = 3A$ implica $A = 2/3$. Per tant,

$$a_n = \frac{2}{3} 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}. \quad \square$$

De fet, en l'argument anterior l'important és que A queda determinat coneixent un terme; que aquest terme sigui el primer a_1 o qualsevol altre és menys important.

El mètode per resoldre les d'ordre 2 està suggerit per l'anterior.

Teorema 2. *Siguin c_1, c_2 constants amb $c_2 \neq 0$. Les successions a_n tals que*

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3)$$

són les següents,
(i) *si $x^2 - c_1 x - c_2 = (x - \alpha)^2$, són les de la forma*

$$a_n = (A + Bn)\alpha^n$$

on A i B estan unívocament determinats per a_1 i a_2.
(ii) *si $x^2 - c_1 x - c_2 = (x - \alpha)(x - \beta)$ amb $\alpha \neq \beta$, són les de la forma*

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

on A i B estan unívocament determinats per a_1 i a_2.

Demostració. (i) Comprovem que totes les successions $a'_n = A\alpha^n$ amb A constant compleixen la recurrència:

$$\begin{aligned} a'_n - c_1 a'_{n-1} - c_2 a'_{n-2} &= A\alpha^n - c_1 A\alpha^{n-1} - c_2 A\alpha^{n-2} \\ &= A\alpha^{n-2}(\alpha^2 - c_1\alpha - c_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comprovem que les successions $a''_n = Bn\alpha^n$ amb B constant també la compleixen:

$$\begin{aligned} a''_n - c_1 a''_{n-1} - c_2 a''_{n-2} &= Bn\alpha^n - c_1 B(n-1)\alpha^{n-1} - c_2 B(n-2)\alpha^{n-2} \\ &= Bn\alpha^{n-2}\left(\alpha^2 - c_1\alpha - c_2\right) + B\alpha^{n-2}(c_1\alpha + 2c_2\big) \\ &= B\alpha^{n-2}(c_1\alpha + 2c_2). \end{aligned}$$

Ara, $x^2 - c_1 x - c_2 = (x - \alpha)^2 = x^2 - 2\alpha + \alpha^2$ implica $c_1 = 2\alpha$ i $c_2 = -\alpha^2$. Per tant,

$$c_1\alpha + 2c_2 = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 = 0.$$

Aleshores les successions $a_n = a'_n + a''_n = (A + Bn)\alpha^n$ compleixen la recurrència.
Recíprocament, si a_n compleix la recurrència, podem determinar A i B per tal que la successió $b_n = (A + Bn)\alpha^n$ tingui valors inicials a_1 i a_2. Aleshores,

$$a_1 = (A + B)\alpha, \quad a_2 = (A + 2B)\alpha^2,$$

donen

$$A = \frac{2\alpha a_1 - a_2}{\alpha^2}, \quad B = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}.$$

(Noteu que $c_2 \neq 0$ comporta $\alpha \neq 0$). Per aquests valors de A i B, resulta

$$a_n = b_n = (A + Bn)\alpha^n.$$

(ii) De la mateixa forma que abans, es comprova que les successions de la forma $a'_n = A\alpha^n$ i $a''_n = B\beta^n$ compleixen la recurrència i, per tant, les successions $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ també la satisfan.

Recíprocament, si a_n compleix la recurrència, podem trobar A i B de forma que

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

En efecte, imposant les condicions inicials

$$a_1 = A\alpha + B\beta, \quad a_2 = A\alpha^2 + B\beta^2,$$

obtenim:

$$A = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad B = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha - \beta)}$$

(Notem que $c_2 \neq 0$ implica que $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$. A més, $\alpha - \beta \neq 0$ per hipòtesi.) $\square$

El polinomi $x^2 - c_1x - c_2$ es diu el *polinomi característic* de la recurrència $a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} = 0$. Com hem vist, les arrels d'aquest polinomi donen la solució general de la recurrència.

Problema 3. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3)$.

Solució. El polinomi característic és $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Així, la solució cercada és de la forma

$$a_n = (A + Bn)2^n.$$

Imposant les condicions inicials

$$1 = a_1 = (A + B)2, \quad 3 = a_2 = (A + 2B)2^2,$$

obtenim $A = B = 1/4$. Per tant,

$$a_n = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}n)2^n = (1 + n)2^{n-2}. \quad \square$$

Problema 4. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 3)$.

Solució. El polinomi característic és $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. La solució general de la recurrència és

$$a_n = A2^n + B(-1)^n.$$

Per $n = 1$ i $n = 2$, tenim,

$$1 = 2A - B, \quad 3 = 4A + B$$

d'on $A = 2/3$ i $B = 1/3$. Per tant,

$$a_n = \frac{2}{3}\, 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right). \quad \square$$

En l'enunciat del teorema i en els exemples, els coeficients A i B s'acaben determinant mitjançant a_1 i a_2. Com es pot veure, però, es poden emprar dos termes qualssevol.

Si les dues arrels del polinomi característic no són reals, aleshores la solució general es pot expressar d'una altra forma. Sigui $x^2 - c_1 x - c_2 = (x-\alpha)(x-\beta)$ amb α i β complexos conjugats. Si r i ψ són el mòdul i l'argument de α, tenim,

$$\alpha = r(\cos\psi + i\sin\psi), \quad \beta = r(\cos\psi - i\sin\psi).$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} A\alpha^n + B\beta^n &= Ar^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) + Br^n(\cos n\psi - i\sin n\psi) \\ &= r^n\left[(A+B)\cos n\psi + (A-B)i\sin n\psi\right] \\ &= r^n(C\cos n\psi + D\sin n\psi), \end{aligned}$$

on

$$C = A + B, \quad D = (A-B)i \quad \text{o, equivalentment,} \quad A = (C - Di)/2, \quad B = (C + Di)/2.$$

Veiem que determinar A i B és equivalent a determinar C i D. Per tant, en el cas d'arrels complexes, la solució general de la recurrència està formada per les successions

$$a_n = r^n(C\cos n\psi + D\sin n\psi).$$

Problema 5. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ $(n \geq 2)$.

Solució. El polinomi característic és $x^2 - 2x + 2$ que té arrels $\alpha = 1 + i$ i $\beta = 1 - i$. El mòdul de α és $r = \sqrt{2}$ i l'argument $\psi = \pi/4$. Per tant,

$$a_n = (\sqrt{2})^n (C \cos n\frac{\pi}{4} + D \sin n\frac{\pi}{4}).$$

Imposant les condicions inicials,

$$1 = a_0 = C, \quad a_1 = 2 = \sqrt{2}\left(\frac{C\sqrt{2}}{2} + D\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que dóna $C = D = 1$. En definitiva,

$$a_n = (\sqrt{2})^n (\cos n\frac{\pi}{4} + \sin n\frac{\pi}{4}). \quad \square$$

Notem que a_0 i a_1 són enters i que $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ per $n \geq 2$. Això comporta que tots els valors a_n són enters, cosa no gens evident a la vista de la fórmula anterior.

3. Els nombres de Fibonacci

Leonardo Fibonacci (que vol dir fill de Bonacci), també conegut com a Leonardo de Pisa (1175–1240, dates aproximades) és un dels grans noms de la ciència. Entre d'altres llibres, fou autor del *Liber Abacci,* que és una obra cabdal en la difusió dels numerals aràbics i dels mètodes per fer les quatre operacions bàsiques tal com les fem avui.
Fibonacci estudià un dels primers problemes d'anàlisi de poblacions. El problema és el següent.

Problema de Fibonacci. Suposem que una parella de conills acabats de néixer pot tenir una parella de fills al final del segon mes i, a partir d'aquí, una parella cada mes. Començant amb una parella de conills acabats de néixer, i suposant que no hi ha defuncions, quantes parelles de conills hi haurà després de n mesos?

Solució. Sigui a_n el nombre de conills al final del mes n. Al final del primer mes només tenim la parella original, o sigui $a_1 = 1$. Al final del segon mes tenim la parella original i la parella de fills, és a dir, $a_2 = 2$. Al final del mes n hi haurà tots el que havia el mes anterior, a_{n-1}, més els nou-nats, que seran tants com parelles hi havia el mes $n-2$, és a dir, a_{n-2}. Per tant,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Resolem la recurrència pel mètode de l'apartat anterior. El polinomi característic és $x^2 - x - 1$ que té arrels

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Per tant,

$$a_n = A \cdot \phi^n + B \cdot \bar{\phi}^n.$$

Per calcular A i B cal imposar les condicions inicials. En lloc de donar els valors $n = 1, 2$, ho arreglarem per donar els valors $n = 0, 1$. Només cal definir a_0 de forma que es compleixi $a_0 + a_1 = a_2$, és a dir, $a_0 = 1$. Imposant $a_0 = a_1 = 1$, resulta,

$$1 = A + B, \quad 1 = A \cdot \phi + B \cdot \bar{\phi},$$

d'on

$$A = \frac{\phi}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{-\bar{\phi}}{\sqrt{5}}$$

i

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{\phi}^{n+1}. \quad \square$$

La recurrència $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ es diu *recurrència de Fibonacci,* i els nombres

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \bar{\phi}^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

s'anomenen *nombres de Fibonacci,* els quals formen la solució de la recurrència de Fibonacci amb condicions inicials $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$. Veiem, doncs, que el problema de Fibonacci té solució $a_n = f_{n+1}$. Noteu que, tot i l'aspecte de la fórmula anterior, els f_n són enters, com es dedueix de la definició recurrent. Els nombres f_n tenen multitud de curioses propietats, algunes de les quals són els problemes del 16 al 22.

El nombre ϕ és la *raó àuria* o *divina proporció* dels clàssics, i ha estat emprada en moltes construccions i pintures, vegeu [Gh].

4. Generalització

El cas de les recurrències lineals d'ordre 1 i 2 només són casos particulars de les d'ordre k, que també es saben resoldre. Enunciarem el teorema general, però no el demostrarem. Comproveu, però, que els teoremes 1 i 2 són casos particulars del següent.

Teorema 3. *Siguin* $c_1, \ldots, c_k$ *constants,* $c_k \neq 0$ *i suposem que*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k = (x - \alpha_1)^{s_1+1} \cdots (x - \alpha_t)^{s_t+1}.$$

Les successions a_n *tals que*

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0 \quad (n \geq k+1),$$

són les de la forma

$$a_n = (A_{1,0} + A_{1,1} n + \cdots + A_{1,s_1} n^{s_1}) \alpha_1^n + \cdots + (A_{t,0} + A_{t,1} n + \cdots + A_{t,s_t} n^{s_t}) \alpha_t^n,$$

on els coeficients $A_{i,j}$ *estan unívocament determinats per* $a_1, \ldots, a_k$.

El *polinomi característic* és el polinomi $x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k$. Per cada arrel α_i de multiplicitat $s_i + 1$ del polinomi característic, hi ha un sumand a la solució general de la recurrència format pel producte d'un polinomi en n de grau s_i per α_i^n.

Problema 6. $a_1 = -6$, $a_2 = 22$, $a_3 = -38$, $a_n - a_{n-1} - 8a_{n-2} + 12a_{n-3} = 0$ $(n \geq 4)$.

Solució. El polinomi característic és $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x+3)(x-2)^2$. Per tant,

$$a_n = A(-3)^n + (B + Cn)2^n.$$

Imposem les condicions inicials:

$$-6 = -3A + 2(B + C), \quad 22 = 9A + 4(B + 2C), \quad -38 = -27A + 8(B + 3C).$$

Aquest sistema té solució $A = 2$, $B = -1$ i $C = 1$. Llavors,

$$a_n = 2(-3)^n + (-1 + n)2^n. \quad \square$$

5. Recurrències no homogènies

Considerem ara recurrències lineals amb coeficients constants *no homogènies,* que són les del tipus

$$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k+1), \tag{3}$$

on $c_1, \ldots, c_k$ són constants i $f(n) \neq 0$ una funció. La *recurrència homogènia associada* a (3) és la que s'obté canviant $f(n)$ per 0.

Veurem que, per a certes funcions $f(n)$, podem trobar la solució general d'aquesta recurrència. Suposem que sabem trobar una successió concreta p_n que compleixi la recurrència (3), és a dir, que compleixi

$$p_n - c_1 p_{n-1} - \cdots - c_k p_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k+1). \tag{4}$$

D'una tal successió se'n diu una *solució particular*. D'altra banda, d'acord amb el que ja hem vist, sabem quina és la solució general de la recurrència homogènia associada a (3),

$$h_n - c_1 h_{n-1} - \cdots - c_k h_{n-k} = 0 \quad (n \geq k+1). \tag{5}$$

Les successions h_n tenen la forma descrita al teorema 3, és a dir, són sumes de productes de polinomis en n per potències de les arrels del polinomi característic. Els coeficients dels polinomis són certs paràmetres i per cada assignació de valors a aquests paràmetres s'obté una solució de la recurrència.

Sumant les igualtats (4) i (5), obtenim que les successions $a_n = h_n + p_n$ compleixen (3). Si les condicions inicials són donades, es poden determinar els paràmetres que apareixen a l'expressió de h_n i obtenir la fórmula explícita per a_n. El problema, doncs, és com obtenir una solució particular p_n.

El mètode següent funciona bé quan $f(n)$ és de la forma *suma de polinomis en n per nombres elevats a n*, és a dir, quan és de la forma de les solucions de recurrències lineals homogènies. Heus ací uns quants exemples on posem $f(n)$, mostrem que és de la forma de les solucions d'una recurrència homogènia, i posem el polinomi característic $q(x)$ de la recurrència.

$f(n)$	n	$2^n - 1$	n^2	$n^2 2^n$
forma	$(A+Bn)1^n$	$A2^n + B1^n$	$(A+Bn+Cn^2)1^n$	$(A+Bn+Cn^2)2^n$
$q(x)$	$(x-1)^2$	$(x-2)(x-1)$	$(x-1)^3$	$(x-2)^3$

El mètode per trobar una solució particular p_n és el següent:

a) Calcular el polinomi característic $p(x)$ de la recurrència homogènia associada;
b) trobar el polinomi característic $q(x)$ d'una recurrència homogènia tal que $f(n)$ pertanyi a la seva solució general;
c) escriure la solució general de la recurrència homogènia de polinomi característic $p(x)q(x)$;
d) de la solució general obtinguda a c), suprimir els sumands que corresponen a $p(x)$;
e) el resultat obtingut és un conjunt de successions entre les quals cal cercar una solució particular. Cal determinar els coeficients imposant la recurrència.

Problema 7. $a_0 = 49/4$, $a_1 = 1/20$, $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 2^n - 1 \quad (n \geq 2)$.

Solució. L'homogènia associada és $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$, que té polinomi característic $p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ i solució general

$$h_n = A \cdot (-3)^n + B \cdot 2^n.$$

Busquem ara una solució particular pel mètode explicat.
a) $p(x) = (x+3)(x-2)$.
b) De $2^n - 1 = 2^n - 1 \cdot 1^n$ deduïm que $q(x) = (x-2)(x-1)$, de forma que $p(x)q(x) = (x+3)(x-2)^2(x-1)$.
c) El polinomi $p(x)q(x)$ és el característic d'una recurrència homogènia de solució general

$$b_n = A\,(-3)^n + B\,2^n + Cn2^n + D\,1^n.$$

d) La part corresponent a $p(x)$ està formada pels sumands amb coeficients A i B, els quals eliminem.
e) Per tant, cerquem una solució particular de la forma $p_n = Cn2^n + D$. Imposant que es compleixi la recurrència original, obtenim

$$\begin{aligned}
&Cn2^n + D + C(n-1)2^{n-1} + D - 6(C(n-2)2^{n-2} + D) = 2^n - 1,\\
&2^{n-2}\,[4Cn + 2C(n-1) - 6C(n-2)] - 4D = 2^n - 1,\\
&2^{n-2}10\,C - 4\,D = 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Prenent $C = 4/10 = 2/5$ i $D = 1/4$ es compleix la recurrència. Una solució particular és, doncs,

$$p_n = \frac{2}{5}\,n\,2^n + \frac{1}{4}.$$

La nostra solució cal buscar-la entre les de la forma

$$a_n = h_n + p_n = A \cdot (-3)^n + B\,2^n + \frac{2}{5}\,n2^n + \frac{1}{4}.$$

Imposant els valors inicials,

$$\frac{49}{4} = a_0 = A + B + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{20} = a_1 = -3A + 2B + \frac{4}{5} + \frac{1}{4},$$

obtenim $A = 5$ i $B = 7$. Per tant,

$$a_n = 5 \cdot (-3)^n + 7 \cdot 2^n + \frac{2}{5}\,n\,2^n + \frac{1}{4}. \quad \square$$

Recurrències no homogènies apareixen en problemes en què es tracta de calcular sumes de n sumands. Per exemple, les ben conegudes fórmules de la suma dels primers n naturals o de n termes d'una progressió geomètrica es poden veure d'aquesta manera, encara que els càlculs resulten més pesats que emprant els enginyosos mètodes tradicionals d'obtenir les fórmules.

Problema 8. Calcular $1+2+3+\cdots+n$.

Solució. Posem $a_n = 1+2+\cdots+n$. Tenim $a_n - a_{n-1} = n$ i a_1=1. La solució general de l'homogènia és $h_n = A$. Cerquem una solució particular. Amb la notació anterior, $p(x) = (x-1)$, $q(x) = (x-1)^2$, i $p(x)q(x) = (x-1)^3$. A aquest polinomi correspon una solució general $B + Cn + Dn^2$, de la qual hem d'eliminar el terme constant B, que correspon a $p(x)$. Cerquem una solució particular del tipus $p_n = Cn + Dn^2$. Ara,

$$n = p_n - p_{n-1} = Cn + Dn^2 - C(n-1) - D(n-1)^2 = 2Dn + (C-D),$$

dóna $C = D = 1/2$. Per tant,

$$a_n = h_n + p_n = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Com que $a_1 = 1$, resulta $A = 0$. En definitiva,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

Problema 9. Calcular $1+r+r^2+\cdots+r^n$ per $r \neq 1$. (El cas $r=1$ és l'exemple 8.)

Solució. Posem $a_n = 1+r+r^2+\cdots+r^n$. Tenim $a_n - a_{n-1} = r^n$. La solució general de la homogènia és $h_n = A$. Amb les notacions anteriors, $p(x) = (x-1)$, $q(x) = (x-r)$, i $p(x)q(x) = (x-1)(x-r)$. A aquest polinomi correspon una solució general $B + Cr^n$, de la qual eliminem la constant B, que correspon a $p(x)$. Cerquem una solució particular de la forma $p_n = Cr^n$. Tenim, $r^n = Cr^n - Cr^{n-1}$, d'on $r = Cr - C$ i $C = r/(r-1)$ (recordeu que $r \neq 1$.) Aleshores,

$$a_n = A + \frac{r^{n+1}}{r-1}.$$

Per $n=1$, tenim $1 + r = A + r^2/(r-1)$, el que dóna $A = 1/(1-r)$. En definitiva,

$$a_n = \frac{1}{1-r} + \frac{r}{r-1}r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \quad \square$$

6. Altres mètodes

Els mètodes que descriurem ara són menys sistemàtics, però sovint útils i es poden aplicar a recurrències lineals i no lineals.

Mètode d'inducció

El *mètode d'inducció* consisteix en calcular uns quants termes i, a la vista dels nombres que surten, conjecturar la solució. Després s'aplica inducció per establir que la conjectura és correcta.

Problema 10. $a_1 = 3\,,\ a_2 = 5\,,\ \ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad (n \geq 3).$

Solució. Calculem els primers termes:

n	1	2	3	4	5
a_n	3	5	9	17	33

Això suggereix $a_n = 2^n + 1$. Per $n = 1, 2$, els valors coincideixen. Si $a_m = 2^m + 1$ per tot $m < n$, aleshores

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1,$$

i la fórmula val per n. $\square$

Mètode d'expansió

De vegades, a l'aplicar repetidament la recurrència podem obtenir la fórmula explícita.

Problema 11. Una *progressió aritmètico-geomètrica* és una successió en què cada terme s'obté del precedent multiplicant-lo per una constant r (anomenada *raó*) i sumant després al resultat una constant d (anomenada *diferència*.) Si $r = 1$, la successió es diu *progressió aritmètica* i, si $d = 0$, *progressió geomètrica.* Trobeu el valor del terme enèsim a_n en funció de la raó, la diferència i a_1. Escriviu les fórmules per als casos de progressions aritmètiques i geomètriques.

Solució. La definició indica que la successió compleix la recurrència $a_n = ra_{n-1} + d$. (Noteu que és lineal d'ordre 1, no homogènia, i que la podríem resoldre pels mètodes ja explicats.) Iterant,

$$\begin{aligned} a_n =& r a_{n-1} + d = r(ra_{n-2} + d) + d = r^2 a_{n-2} + (1+r)d \\ =& r^2(ra_{n-3} + d) + (1+r)d = r^3 a_{n-3} + (1 + r + r^2)d \\ =& \dots \\ =& r^{n-1}a_1 + (1 + r + \cdots + r^{n-2})d \\ =& \begin{cases} r^{n-1}a_1 + \dfrac{1 - r^{n-1}}{1 - r} d & \text{si} \;\; r \neq 1, \\ a_1 + (n-1)d & \text{si} \;\; r = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Per les progressions aritmètiques ($r = 1$) tenim

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Per les geomètriques ($d = 0$) obtenim

$$a_n = a_1 r^{n-1}. \quad \square$$

Canvis de variable

El següent exemple il·lustra el que entenem pel mètode de *canvi de variable.*

Problema 12. Trobeu una successió a_n de nombres reals positius tals que

$$a_0 = 2 \quad \text{i} \quad a_n^2 - 5a_{n-1}^2 = 0.$$

Solució. Posem $b_n = a_n^2$. Aleshores $b_0 = 4$ i $b_n - 5b_{n-1} = 0$. Aquesta recurrència és lineal i la sabem resoldre: $b_n = A \cdot 5^n$. Per $n = 0$ obtenim $4 = A$. Així, $b_n = 4 \cdot 5^n$. Per tant

$$a_n = 2(\sqrt{5})^n. \quad \square$$

El canvi $b_n = a_n^2$ ha permès transformar la recurrència inicial, que no és lineal, en una recurrència lineal de primer ordre.

Recurrències dobles

Una *successió doble* és una aplicació

$$a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

La imatge d'una parella (n,m) es denota $a_{n,m}$. La forma *explícita* de definir una successió doble és donar una fórmula que permeti calcular directament $a_{n,m}$ a partir de n i m. Per exemple,

$$a_{n,m} = \binom{n}{m}. \tag{5}$$

Una forma alternativa és donar unes successions de *condicions inicials* i una *recurrència doble* que permeti calcular $a_{n,m}$ a partir dels valors $a_{r,s}$ anteriors. Què vol dir *anteriors*? Hi ha diferents formes d'ordenar parelles de naturals, i cada una d'elles proporciona un concepte d'anterior. El més freqüent, però, és el següent: Les parelles *anteriors* a la parella (n,m) són les parelles (r,s) tals que $r<n$ i les parelles (r,s) tals que $r=n$ i $s<m$. Per exemple, la successió de nombres binomials (5) es pot definir mitjançant les condicions inicials

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,1} = n \quad (n \geq 1),$$

i la recurrència doble

$$a_{n,m} = a_{n-1,m-1} + a_{n-1,m} \quad (n \geq 2, m \geq 2).$$

En efecte, els nombres binomials compleixen les condicions inicials

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n,$$

i la recurrència

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}. \tag{6}$$

Els problemes 33 i 34 tracten de recurrències dobles relacionades amb els nombres binomials.

7. Referències

[An] Anderson, I., *Introducción a la combinatoria,* Editorial Vicens–Vives, Barcelona, 1993.

[Bi] Biggs, N. L. *Matematicas discretas,* Editorial Vicens–Vives, Barcelona, 1994.

[Br] Brunat, J. M., *Combinatòria i teoria de grafs,* 3a edició, Edicions UPC, Barcelona, 1997.

[Gh] Ghyca, M. C., *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes,* Editorial Poseidón, Barcelona, 1983.

[Go] S. Goldberg, S. *Introduction to Difference Equations,* Dover Publications, Inc. New York, 1986.

[Gr] Grimaldi, R. P., *Matemáticas discreta y combinatoria,* 3^a edición, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

El llibre de Ghyca [Gh] explica múltiples propietats del nombre d'or i la seva utilització en obres d'art (pintura, arquitectura) i la seva aparició en formes de la naturalesa.
Dels altres llibres, l'únic dedicat exclusivament a les recurrències, (també anomenades equacions en diferències,) és el de S. Goldberg [Go]. Hi podeu trobar molts exemples d'aplicació de les recurrències a l'economia, psicologia i sociologia.
Una discussió detallada de les recurrències lineals amb coeficients constants des d'un punt de vista no molt llunyà al que hem seguit aquí la podeu trobar a [Br]. Per exemple, hi ha la prova del teorema 3 i el motiu pel qual el mètode explicat per trobar una solució particular funciona bé. En aquest llibre hi ha, però, molt pocs exemples i cap problema.
La major part dels problemes proposats a la secció següent provenen del llibre de Grimaldi [Gr], en el qual hi ha molts exemples detallats i molts problemes proposats. També hem usat els llibres d'Anderson [An] i Biggs [Bi], que són de dimensions més reduïdes que el de Grimaldi. En tots tres trobareu notícia sobre la tècnica de les funcions generadores per resoldre recurrències, de la qual aquí no hem comentat res.

8. Problemes

RE1. Tot resolent cert problema, es diu que una persona és al nivell n quan li falten n etapes per arribar a la solució. A cada nivell té 5 alternatives, dues que la porten al nivell $n-1$ i tres que són millors, en el sentit que la porten directament al nivell $n-2$. Sigui a_n el nombre de maneres d'arribar a la solució des del nivell n. Trobeu a_n sabent que $a_1=2$.

RE2. Un sistema permet d'emetre tres senyals diferents, un dels quals dura un segon i, els altres, dos segons cadascun. Trobeu el nombre de senyals diferents que es poden emetre en n segons suposant que no hi ha cap temps mort entre cada dos senyals.

RE3. S'estima que la facturació d'una empresa és cada any la mitjana entre la de l'any anterior i la de l'any següent. Si les vendes el 1990 són v_0 i les del 1991 són v_1, calculeu les vendes de l'any $1990+n$.

RE4. Una bandera s'ha de dissenyar amb n franges horitzontals d'igual mida. Cada franja pot ésser vermella, blava, verda o groga. Calculeu el nombre de banderes que es poden dissenyar en els següents casos:
a) No hi ha cap restricció sobre el color de cada franja.
b) Franges consecutives no poden tenir el mateix color.
c) Franges consecutives no poden tenir el mateix color i les franges dels extrems tampoc no poden ésser del mateix color.

RE5. El joc de les torres de Hanoi consta de tres pals verticals A, B i C i de n discs de radis diferents que, al principi, són apilats de gran (sota) a petit (dalt), travessats pel pal A. L'objectiu és col·locar la pila en idèntica posició però al pal C. L'única jugada permesa és passar el disc més alt d'una pila a la posició superior d'una altra pila, sense cobrir, però, un disc més petit. Trobeu una relació recurrent per al nombre mínim de jugades necessàries per completar el joc i resoleu-la.

RE6. Considerem n rectes al pla en posició general (cada dues no paral·leles, cada tres no concurrents).
a) En quantes regions queda dividit el pla?
b) Quantes d'aquestes regions són no fitades?

RE7. Considerem el conjunt de totes les paraules de longitud n en l'alfabet $\{0,1,2\}$.
a) Quantes tenen els dígits cadascun igual o superior a l'anterior?
b) Quantes paraules són cap-i-cua?

RE8. Considerem el conjunt de totes les paraules de longitud n en l'alfabet $\{0,1,2\}$.
a) Quantes n'hi ha que continguin dos símbols consecutius iguals?
b) A quantes d'elles no hi ha ni dos uns consecutius ni dos dosos consecutius?

RE9. Determineu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0,1,2,3\}$ tals que no tenen cap 3 més a la dreta d'un 0.

RE10. Trobeu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0,1,2,3\}$ tals que tenen un nombre parell de zeros.

RE11. En el pla hi ha dos punts pintats de groc i n punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments que tenen per extrems punts de diferents colors.
a) Proveu que el nombre mínim de segments que cal dibuixar per tal que tots els punts quedin connectats és $n+1$.
b) De quantes maneres diferents es poden dibuixar $n+1$ segments de forma que tots els punts quedin connectats?

RE12. Trobeu el nombre de maneres diferents de pujar una escala de n graons si en cada pas en pugem un o dos.

RE13. Calculeu el nombre de subconjunts del conjunt $\{1,2,3,\ldots,n\}$ que no contenen dos enters consecutius.

RE14. Calculeu el nombre de formes d'enrajolar un passadís rectangular de mides $2\times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i i no es poden trencar rajoles.

RE15. Si $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, calculeu a_n.

En els set problemes següents es segueix la notació de la secció 3. Així, ϕ representa el nombre d'or, $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, i $\bar{\phi}$ el seu conjugat $\bar{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$. A més, f_n denota el n-è nombre de Fibonacci, $f_n = (\phi^n - \bar{\phi}^n)/\sqrt{5}$.

RE16. Considereu la recurrència de Fibonacci $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ amb condicions inicials $a_0 = 1$ i $a_1 = \phi$. Demostreu que $a_n = \phi^n$.

RE17. Calculeu $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

RE18. Calculeu $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}$.

RE19. Calculeu $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n}$.

RE20. Proveu que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k = f_{2n}$.

RE21. a) Demostreu que ϕ i $\bar{\phi}$ són arrels del polinomi $x^3 - 2x - 1$.
b) Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}.$$

RE22. a) Comproveu que les igualtats $x^2 + 1 = 2 + x$ i $(2+x)^2 = 5x^2$ es compleixen per $x = \phi$ i per $x = \bar{\phi}$.
b) Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} f_{2k+m} = 5^n f_{2n+m}.$$

RE23. Una carpeta conté n fulls i en busquem un examinant-los consecutivament a partir del primer. Quina és la mitjana del nombre de fulls examinats?

RE24. Voleu pintar els vèrtexs d'un polígon de n costats de forma que vèrtexs contigus tinguin colors diferents. Disposeu d'una caixa de k colors. De quantes maneres ho podeu fer?

RE25. Segons es diu, el rei King Shirham de l'Índia volgué recompensar el seu Gran Visir Sissa Ben Dahir per inventar el joc dels escacs i li demanà quin premi volia. El Visir contestà: —dona'm un gra de blat pel primer quadrat, dos pel segon, quatre pel tercer, vuit pel quart, etc. fins acabar amb tots els quadrats del taulell. Cas de satisfer la demanda, quants grans de blat li hauria donat el rei al visir?.

RE26. Calculeu, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.

RE27. Calculeu $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

RE28. Sigui a un nombre real i n un enter positiu. Calculeu, $a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n$.

RE29. Trobeu una fórmula explícita per la successió a_n definida per

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

RE30. Calculeu a_n sabent que $a_1 = 12$, $a_2 = 60$ i

$$n(n+1)a_{n+2} - 5n(n+2)a_{n+1} + 4(n+1)(n+2)a_n = 0, \quad (n \geq 0).$$

RE31. Resoleu per iteració la recurrència $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta^n$.

RE32. Teniu n objectes numerats de 1 a n i n llocs numerats de 1 a n per desar-los. Sigui d_n el nombre de formes de desar els objectes de forma que no n'hi hagi cap al seu lloc. Establiu una recurrència per d_n i calculeu d_n.

RE33. Considereu la recurrència amb dos índexs

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{n,k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ò } k > n, \quad a_{n,k} = \frac{1}{2}(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}) \text{ altrament.}$$

Calculeu uns quants $a_{n,k}$, conjectureu una fórmula, i proveu-la per inducció.

RE34. Sigui $\lambda(n,k)$, on $n \geq 1$, el nombre de k-subconjunts de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ que no contenen dos enters consecutius.

a) Demostreu que $\lambda(n,k) = \lambda(n-1,k) + \lambda(n-2,k-1)$ per tot $n \geq 3$.

b) Proveu que per tot $n \geq 1$ i $0 \leq k \leq n$,

$$\lambda(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

c) Calculeu el nombre $\mu(n,k)$ de maneres d'escollir k persones d'entre n assegudes en una taula rodona sense agafar-ne dues de veïnes.

9. Mostra de solucions

Solució del problema RE4

Apartat c).

Sigui a_n el nombre demanat. Si $n = 1$, la primera i última franja coincideixen i tenen el mateix color. Per tant, $a_1 = 0$. A més, $a_2 = 4 \cdot 3 = 12$. Per $n \geq 3$, les banderes demanades amb n franges es classifiquen en:

(1) les que tenen les franges en les posicions 1 i $n-1$ de colors diferents, de les quals n'hi ha $2a_{n-1}$;

(2) les que tenen les franges en les posicions 1 i $n-1$ del mateix color, de les quals n'hi ha $3a_{n-2}$. Així, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Tenim, doncs,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 12, \quad a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3).$$

La solució és

$$a_n = 3^n + 3 \cdot (-1)^n.$$

Solució del problema RE8b)

Sigui a_n el nombre de paraules de longitud n que no tenen dos uns ni dos dosos consecutius. Tenim $a_1 = 3$ i $a_2 = 7$. Per $n \geq 3$, aquestes paraules es classifiquen en:

(1) les que no tenen cap zero, de les quals n'hi ha 2;

(2) les que tenen el primer zero a la posició 1, de les quals n'hi ha a_{n-1};

(3) les que tenen el primer zero a la posició k, $2 \leq k \leq n-1$, de les quals n'hi ha $2a_{n-k}$;

(4) les que tenen el primer zero a l'última posició, de les quals n'hi ha 2.

Resulta, doncs, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + 2a_1 + 4$. Això implica $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$, el que dóna la recurrència $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Tenim, doncs,

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3),$$

que té solució

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right].$$

Solució del problema RE15

Amb el canvi $b_n = \log_2 a_n$ resulta

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

que defineix la successió de Fibonacci $b_n = f_n$. Per tant, la solució és $a_n = \exp_2 f_n$.

Solució del problema RE18

Si $a_n = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}$, tenim $a_n - a_{n-1} = f_{2n-1}$. La solució general de la homogènia és $h_n = A$. Les propietats dels nombres de Fibonacci permet veure sense càlcul que f_{2n} és una solució particular. Aleshores, $a_n = A + f_{2n}$. Posant $n = 1$ obtenim $1 = a_1 = A + f_2 = A + 1$, d'on $A = 0$. Així, $a_n = f_{2n}$.

Solució del problema RE22

a) En tots dos casos, simplificant s'obté l'equació $x^2 - x - 1 = 0$, que té solucions ϕ i $\bar{\phi}$.

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}f_{2k+m} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{\phi^{2k+m}-\bar{\phi}^{2k+m}}{\sqrt{5}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\phi^2)^k\cdot\phi^m-\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\bar{\phi}^2)^k\cdot\bar{\phi}^m\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^m(1+\phi^2)^{2n}-\bar{\phi}^m(1+\bar{\phi}^2)^{2n}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^m(2+\phi)^{2n}-\bar{\phi}^m(2+\bar{\phi})^{2n})\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^m(5\phi^2)^n-\bar{\phi}^m(5\bar{\phi}^2)^n)\\
&= 5^n\,\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{2n+m}-\bar{\phi}^{2n+m})\\
&= 5^n\,f_{2n+m}.
\end{aligned}$$

Solució del problema RE24

Sigui a_n el nombre de les coloracions considerades del polígon de n vèrtexs. Numerem els vèrtexs $1,2,\ldots,n$ en sentit directe. Tenim $a_3=k(k-1)(k-2)$. Calculem a_4. Coloracions tals que 1 i 3 tinguin diferent color n'hi ha $k(k-1)(k-2)^2$, que corresponen a k possibles colors pel vèrtex 2, $k-1$ pel 1, $k-2$ pel 3 i $k-2$ pel 4. Coloracions tals que els vèrtexs 1 i 3 tenen el mateix color n'hi ha $k(k-1)^2$, que corresponen a k colors possibles pel vèrtex 2, $k-1$ colors pels vèrtexs 1 i 3 i $k-1$ pel vèrtex 4. Per tant,

$$a_4=k(k-1)^2+k(k-1)(k-2)^2=k(k-1)(k^2-3k+3).$$

Per $n\geq 4$, les coloracions es classifiquen en:

(1) Aquelles en què els vèrtexs 1 i 3 tenen diferent color. D'aquestes n'hi ha tantes com coloracions del polígon que s'obté suprimint el vèrtex 2 i unint els vèrtexs 1 i 3, que són a_{n-1}, pel nombre de colors possibles del 2, que són $(k-2)$. Així, d'aquestes n'hi ha $(k-2)a_{n-1}$.

(2) Aquelles en què els vèrtexs 1 i 3 tenen el mateix color. D'aquestes n'hi ha tantes com coloracions del cicle que s'obté suprimint el vèrtex 2 i identificant els vèrtexs 1 i 3, multiplicat pel nombre possible de coloracions del 2, que són $(k-1)$. En tenim, doncs, $(k-1)a_{n-1}$.

En definitiva, obtenim

$$a_3=k(k-1)(k-2),\quad a_4=k(k-1)(k^2-3k+3),\quad a_n=(k-2)a_{n-1}+(k-1)a_{n-2}\quad(n\geq 3).$$

El polinomi característic té arrels $k-1$ i -1. La solució és

$$a_n = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n.$$

Solució del problema RE30

Fent el canvi $a_n = nb_n$ i simplificant el factor $n(n+1)(n+2)$ queda

$$b_1 = 12, \quad b_2 = 30, \quad b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

que té solució $b_n = 3 \cdot 2^{2n-1} + 6$. Aleshores,

$$a_n = 3\,n\,2^{2n-1} + 6n.$$

Solució del problema RE32

d_n és el nombre de permutacions de $1, 2, 3, \ldots n$ tals que cap nombre és a la seva posició. Aquestes permutacions s'anomenen *desarranjaments.* Tenim $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. Per $n \geq 3$, fixem un r, $1 \leq r \leq n-1$, i considerem els desarranjaments que tenen r a l'última posició. Aquests es classifiquen en dues classes segons la posició que ocupi n.
(1) Que n ocupi la posició r n'hi ha d_{n-2};
(2) Que n ocupi una posició diferent de la r n'hi ha d_{n-1}.
Com que r pot tenir $n-1$ valors, obtenim

$$d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} \ (n \geq 3).$$

Fem el canvi $d_n = n!\,b_n$; s'obté

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1/2, \qquad n(b_n - b_{n-1}) = -(b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

Ara fem el canvi $c_n = b_n - b_{n-1}$, que dóna

$$c_2 = 1/2, \qquad c_n = -c_{n-1}/n \quad (n \geq 3).$$

Per expansió resulta $c_n = (-1)^n/n!$ per $n \geq 2$. Aleshores,

$$b_n = c_n + b_{n-1} = c_n + (c_{n-1} + b_{n-2}) = \cdots = c_n + c_{n-1} + \cdots + c_2 + b_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

D'aquí,

$$d_n = n!\,b_n = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

DESIGUALTATS

Ignasi Mundet i Riera

Per començar, deixa'm proposar-te dos problemes...
• Suposem que tenim n nombres reals qualssevol $a_1, \ldots, a_n$, de manera que la seva suma sigui 1. Demostra que la suma dels quadrats d'aquests nombres és més gran que $1/n$.
• Prenem novament n nombres reals, $a_1, \ldots, a_n$, però ara exigim que siguin positius. Suposem que el seu producte és igual a 1. Demostra que llavors la seva suma és més gran que n.
Abans de continuar llegint, intenta resoldre'ls...
Te n'has cansat? Doncs deixa'm donar-te una pista. Mira de resoldre aquest problema:
Demostreu que per a tot nombre real x es té la desigualtat

$$x^2 - 6x + 13 \geq 4.$$

Aquest és més fàcil, no? Va, vinga, pensa'l.
És probable que el primer que hagis fet sigui derivar. Molt bé; és una possibilitat. Ara, tot i que a tu et sembli molt natural, deixa'm dir-te (no t'ofenguis!), que això és un pel recargolat. En efecte, si escrivim

$$x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4,$$

i recordem que un nombre real elevat al quadrat *sempre* és més gran o igual que zero, el problema és obvi. Aquesta pista no és cap tonteria. Les derivades són un instrument potentíssim i molt astut, però n'hi ha d'altres més elementals i senzills que permeten resoldre els dos problemes del començament. En canvi, si vols fer-ho usant tècniques de càlcul infinitesimal, el més probable és que et faltin alguns coneixements (cosa molt normal). Per tant, intenta resoldre els dos problemes amb aquesta *eina*: tot nombre real elevat al quadrat és més gran o igual que zero. Au, a pensar!
Com que veig que tornes a llegir, t'explico algunes maneres de solucionar els dos problemes. És perfectament possible que tu ja els hagis resolt, però que hagis seguit un altre camí (ja me l'explicaràs). Espero que, en tot cas, les solucions que et dono et resultin interessants...

La desigualtat de Cauchy-Schwartz

Anem a resoldre el primer. Recordes la fórmula del producte escalar? Si tens dos vectors de l'espai, $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$, el seu producte escalar $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

és igual al producte dels mòduls de x i y pel cosinus de l'angle que determinen els dos vectors. Ara bé, com que per a qualsevol nombre α real el valor absolut de $\cos\alpha$ està entre 0 i 1, resulta que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x.y \leq \|x\| \cdot \|y\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}.$$

Elevant-ho tot al quadrat i comparant els termes dels extrems, obtenim:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Ens podem preguntar: si en lloc de prendre vectors en dimensió tres els agafem en una dimensió arbitrària, segueix essent certa aquesta desigualtat? La resposta és afirmativa. Escrivim-ho bé:

TEOREMA. *Siguin $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$ nombres reals. Llavors es compleix*

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Aquesta desigualtat s'anomena **desigualtat de Cauchy-Schwartz**. Demostrem-la. Escrivim $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Si prenem qualsevol nombre real λ, es compleix

$$(x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = \|x - \lambda y\|^2 \geq 0.$$

Desenvolupem i obtenim

$$(x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = x \cdot x - 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 y \cdot y.$$

Fixa't ara en el terme de la dreta. Oi que és un polinomi en λ amb coeficients reals? A més, hem quedat que aquest polinomi sempre és positiu. Això, ja ho deus saber (i si no, mira de demostrar-ho), implica que el discriminant del polinomi és negatiu. Escrivim-ho:

$$0 \geq (2x \cdot y)^2 - 4(x \cdot x)(y \cdot y).$$

Desenvolupa el terme de la dreta, divideix per quatre, i obtindràs que

$$(x \cdot x)(y \cdot y) \geq \big(x \cdot y\big)^2,$$

que és el que volíem demostrar (escrit d'una altra manera). Doncs ara torna a pensar el primer problema, a veure si et surt.

Desigualtat MA-MG

Si tens n nombres reals, $x_1, \ldots, x_n$, la seva mitjana aritmètica es defineix:

$$M_A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Segur que això ja t'ho havien explicat (potser sols escriure la mitjana $\bar{x}$). Ara bé, no se t'ha acudit mai que es podria fer la mitjana d'una altra manera? Per exemple, en lloc de sumar els nombres i dividir per n, podríem multiplicar-los i calcular l'arrel n-èssima del resultat. Aquesta mitjana s'anomena mitjana geomètrica; l'escriurem:

$$M_G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}$$

Quina relació hi ha entre les mitjanes M_A i M_G? Per exemple, quina és la més gran? Està clar que si els nombres $x_1, \ldots, x_n$ poden ser tant negatius com positius, a vegades $M_A > M_G$ i a vegades $M_A < M_G$ (per què?). Per tant, a partir d'ara considerarem mitjanes de nombres positius. Què es pot dir aleshores? Mirem què passa amb dos nombres positius a i b. Llavors $M_A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ i $M_G(a, b) = \sqrt{ab}$. Quina és més gran? Va, a veure si ho endevines!

Sí, és clar: sempre es compleix $M_A(a, b) \geq M_G(a, b)$. Per demostrar-ho podem fer servir el truc de sempre:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Desenvolupo i em surt:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

i per tant:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Ja està. Ah, per cert! En quins casos és $M_A(a, b) = M_G(a, b)$? (Això t'ho deixo a tu perquè ho pensis.)

I què passa si en lloc de considerar mitjanes de dos nombres, les agafem de tres nombres? O de qualsevol quantitat de nombres? Doncs resulta que la desigualtat $M_A \geq M_G$ sempre es compleix. Això se sol anomenar **la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica** (o, més curt: **desigualtat MA-MG**):

TEOREMA. *Siguin $x_1, \ldots, x_n$ nombres reals positius. Llavors es compleix:*

$$M_A(x_1, \ldots, x_n) \geq M_G(x_1, \ldots, x_n),$$

i només hi ha igualtat quan $x_1 = \cdots = x_n$.

T'explico una demostració (molt bonica) que en va donar un matemàtic hongarès que es diu G.Pólya. Primer de tot, demostra (si no la saps), aquesta desigualtat: per a tot x real, $e^{x-1} \geq x$. (En quins casos hi ha igualtat?).
Diguem $M_A(x_1, \ldots, x_n) = a$ i escrivim:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1}{a}-1} &\geq \frac{x_1}{a} \\ e^{\frac{x_2}{a}-1} &\geq \frac{x_2}{a} \\ &\cdots \\ e^{\frac{x_n}{a}-1} &\geq \frac{x_n}{a} \end{aligned}$$

Multiplico tots els termes de la dreta i tots els de l'esquerra i obtinc:

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{a}-n} \geq \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{a^n}.$$

I si ara uso que $M_A(x_1, \ldots, x_n) = a$ a l'esquerra em queda un $e^0 = 1$ i per tant:

$$1 \geq \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{a^n}$$

(això és el que volíem demostrar, no?). Queda per veure que només hi ha igualtat quan tots els x_i són iguals (va, fes-ho tu).
..i ara sí que pots solucionar el segon problema.

Altres mitjanes

T'explicaré una altra manera de demostrar la desigualtat anterior. És menys enginyosa, però es pot usar per demostrar moltes altres desigualtats entre mitjanes. Observa aquestes propietats trivials de la mitjana aritmètica:
1. $M_A(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = M_A(M_A(x_1, \ldots, x_n), M_A(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}))$.
2. Si $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$, llavors $M_A(x_1, \ldots, x_n) \geq M_A(y_1, \ldots, y_n)$.
3. Si $y < M_A(x_1, \ldots, x_n)$, llavors $y < M_A(y, x_1, \ldots, x_n) < M_A(x_1, \ldots, x_n)$.
4. Si $y > M_A(x_1, \ldots, x_n)$, llavors $y > M_A(y, x_1, \ldots, x_n) > M_A(x_1, \ldots, x_n)$.
Comprova que la mitjana geomètrica també ho compleix (de fet, és ben raonable que una mitjana tingui aquestes propietats, no?). Ara siguin $x_1, \ldots, x_n$ nombres positius. Per demostrar la desigualtat $M_A(x_1, \ldots, x_n) \geq M_G(x_1, \ldots, x_n)$, usarem inducció sobre n. El cas $n = 2$ és fàcil, i l'hem vist al començament de la secció anterior. Suposem doncs que

$n > 2$ i que el teorema és cert per a tot enter k, $2 \leq k < n$. Si n és parell, $n = 2m$, uso la hipòtesi inductiva:

$$M_A(x_1, \ldots, x_m) \geq M_G(x_1, \ldots, x_m),$$
$$M_A(x_{m+1}, \ldots, x_{2m}) \geq M_G(x_{m+1}, \ldots, x_{2m}),$$

i les propietats anteriors:

$$\begin{aligned} M_A(x_1, \ldots, x_{2m}) &= M_A(M_A(x_1, \ldots, x_m), M_A(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})) \geq \\ &\geq M_A(M_G(x_1, \ldots, x_m), M_G(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})) \geq \\ &\geq M_G(M_G(x_1, \ldots, x_m), M_G(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})) = \\ &= M_G(x_1, \ldots, x_{2m}) \end{aligned}$$

Ara suposem que n sigui senar, $n = 2m + 1$. Vegem que aquí també funciona la cosa. Suposem el contrari, i arribarem a un absurd. Sigui doncs

$$a = M_A(x_1, \ldots, x_n) < M_G(x_1, \ldots, x_n) = b$$

Aleshores prenc un y tal que $a < y < b$. Per les propietats de les mitjanes,

$$a < M_A(y, x_1, \ldots, x_n) < y < M_G(y, x_1, \ldots, x_n) < b.$$

És a dir, que

$$M_A(y, x_1, \ldots, x_n) \leq M_G(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Però $y, x_1, \ldots, x_n$ són $n+1 = 2m+2$ nombres. Ara, per hipòtesi inductiva, el teorema és cert per $m+1$ nombres (comprova que $m+1 < n$). Però hem vist abans que si el teorema és cert per $m+1$, llavors també ho és per $2m+2$. Per tant ha de ser

$$M_A(y, x_1, \ldots, x_n) \geq M_G(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Contradicció! (i, per tant, ja hem acabat).

Vegem com aquesta tècnica es pot usar per probar altres desigualtats. Fixa't que per veure que en general $M_A \geq M_G$, només he usat que tant M_A com M_G compleixen les propietats (1) a (4) i que si prenem dos nombres, aleshores la desigualtat és certa (aquest últim fet és fàcil de demostrar).

Definim ara la mitjana harmònica dels nombres positius diferents de zero $x_1, \ldots, x_n$:

$$M_H(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)$$

Ara, per veure que sempre $M_H \leq M_A$, només cal comprovar-ho considerant les mitjanes de dos nombres, i després verificar que la mitjana M_H també compleix les propietats (1) a (4) (fes-ho!).

En general, si $x_1, \ldots, x_n$ són nombres positius diferents de zero i $\alpha \neq 0$ és un nombre real, es defineix:

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

Observa que la mitjana aritmètica és M_1 i l'harmònica M_{-1}. Definim també

$$M_0(x_1, \ldots, x_n) = M_G(x_1, \ldots, x_n).$$

Aleshores es pot demostrar aquest

TEOREMA. *Siguin α i β dos nombres reals qualssevol, i suposem que $\alpha < \beta$. Llavors*

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq M_\beta(x_1, \ldots, x_n),$$

amb igualtat només quan tots els x_i són iguals. Et veus amb cor de demostrar-lo? Pensa una estona i veuràs que amb tot el que t'he explicat és força fàcil.

... i altres desigualtats

Desigualtat de Young

Sigui $y = \phi(x)$ una funció que per $x \geq 0$ és contínua, estrictament creixent (és a dir, si $x_1 > x_2 \geq 0$ llavors $\phi(x_1) > \phi(x_2)$) i tal que $\phi(0) = 0$, i $\phi(x) \to \infty$ quan $x \to \infty$. Llavors existeix la funció inversa de ϕ, que escriurem ψ. Es compleix per a tot x positiu que $\psi(\phi(x)) = x$. Aleshores, si a i b són nombres positius, la **desigualtat de Young** diu que

$$ab \leq \int_0^a \phi(x)dx + \int_0^b \psi(x)dx.$$

Per demostrar-la, dibuixa el gràfic de ϕ i veuràs que el resultat és absolutament obvi (pots considerar per separat els casos $b > \phi(a)$, $b = \phi(a)$ i $b < \phi(a)$).

Desigualtat de Hölder

Considera la desigualtat de Young amb la funció $\phi(x) = x^{p-1}$. Juga una mica i obtindràs la **desigualtat de Hölder**: *Si p i q són positius tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, aleshores*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualtat de Jensen

Sigui ϕ una funció definida per a tot nombre real que sigui convexa. Llavors, si $x_1, \ldots, x_n$ són nombres reals qualssevol, es compleix

$$\phi\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \phi(x_i)}{n}.$$

Més en general, si f és una funció real definida a l'interval $[0,1]$, llavors

$$\int_0^1 \phi(f(s))ds \geq \phi\left(\int_0^1 f(s)ds\right).$$

Desigualtat de Bernouilli

Sigui $x \geq -1$ i $0 < \alpha < 1$. Llavors

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

En canvi, si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, llavors es compleix

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Només hi ha igualtat (en els dos casos) quan $x = 0$. (Aquesta és fàcil de demostar.)

Problemes

Per acabar, uns quants problemes. Alguns es resolen amb el que hem vist fins ara; d'altres amb una mica d'imaginació i prou; i d'altres, amb les dues coses.

Problemes senzills

DE1. Sigui $n > 1$ un nombre natural. Demostra que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

DE2. Demostra que si $x + y + z = 6$ llavors $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

DE3. Quin dels dos nómbres és més gran:

$$(19941994!)^2 \text{ ó } 19941994^{19941994}.$$

DE4. Demostreu que per a qualsevol x real es compleix

$$e^x \leq x + e^{x^2}.$$

DE5. Quina és la mínima longitud possible de la diagonal més gran d'un trapeci d'àrea 1?

DE6. Demostreu que donats nombres reals T_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ arbitraris, es compleix la desigualtat

$$\sum_{j,k=1}^{n} \cos(T_k - T_j) \geq 0.$$

DE7. A l'interior d'un quadrat de costat 1 hi ha nou punts. Demostreu que existeix un triangle amb l'àrea més petita que $1/8$ i tal que els seus vèrtexs són tres dels nou punts donats.

DE8. Suposem que n és un nombre natural, i que els nombres a_i (on $1 \leq i \leq n$) i p són reals i positius. Demostreu la desigualtat:

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p+1}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right).$$

DE9. Sabem dels nombres $a_1, \ldots, a_n$, que per a qualsevol k es compleix la desigualtat $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} \geq 0$ i a més a més que $a_1 = a_n = 0$. Demostreu que aleshores tots els a_j són no positius.

DE10. Existeix alguna funció injectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que compleixi per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$ la desigualtat $f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$?

DE11. Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Problemes no tan senzills

DE12. Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

DE13. Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

DE14. Demostra que per a qualssevol nombres positius $x_1,\ldots,x_n$ es té la desigualtat

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{4}.$$

DE15. Sigui A un conjunt de S punts a l'espai de tres dimensions. Siguin S_x, S_y i S_z les quantitats de punts que surten a les projeccions ortogonals de A sobre els plans $x=0$, $y=0$ i $z=0$ respectivament. Demostra que

$$S^2\leq S_xS_yS_z.$$

DE16. Sigui f una funció no negativa, contínua i còncava a l'interval $[0,1]$ i tal que $f(0)=1$. Llavors

$$\int_0^1 xf(x)dx\leq\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

Mostra de solucions

Solució del problema DE2

Aplicant la desigualtat Cauchy-Schwartz als vectors $u=(1,1,1)$ i $v=(x,y,z)$, surt

$$\big((1,1,1)\cdot(x,y,z)\big)^2=(u\cdot v)^2\leq\|u\|^2\|v\|^2=3(x^3+y^2+z^2),$$

o bé, $36=(x+y+x)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$, i d'aquí es dedueix, dividint per 3, el resultat. La desigualtat no es pot millorar, ja que el vector $(2,2,2)$ fa que sigui $x^2+y^2+z^2=12$.

Solució del problema DE6

Sigui el nombre complex

$$A=\sum_1^n e^{iT_j}=\sum_1^n \big(\cos T_j + i\sin T_j\big).$$

El seu conjugat és $\bar A=\sum_1^n e^{-iT_j}=\sum_i^n(\cos T_j - i\sin T_j)$, i el producte $A\bar A$, que és un nombre *real* més gran o igual que zero, és

$$0\le A\bar A=\sum_{j,k} e^{i(T_j-T_k)}=\sum_{j,k}\cos(T_j-T_k).$$

Observeu que la part imaginària de $A\bar A$, que és $\sum_{j,k}\sin(T_j-T_k)$, és nul·la, tan per la deducció anterior, com per la observació directa dels termes $\sin(T_r-T_s)$ i $\sin(T_s-T_r)$ iguals i de signe contrari.

Solució del problema DE11

Observem que

$$\frac12<\frac23,\quad \frac34<\frac45,\quad \dots,\quad \frac{k-1}{k}<\frac{k}{k+1}<1.$$

Això ens permet escriure

$$\left(\frac12\right)^2\left(\frac34\right)^2\cdots\left(\frac{97}{98}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^2<\frac12\frac23\frac34\frac45\cdots\frac{97}{98}\frac{98}{99}\frac{99}{100}\frac{100}{100}=\frac{1}{100}$$

i, fent l'arrel quadrada, surt el resultat

$$\frac12\frac34\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Solució del problema DE15

Considerem la família π_1, π_2, ... , π_k de plans paral·lels a $z=0$ que contenen punts del conjunt donat: es fa passar per cada punt del conjunt inicial un pla paral·lel a $z=0$, i es treuen els plans repetits. Cada un dels plan π_i conté un o més punts del conjunt inicial. Sigui a_i el nombre de punts que són al pla π_i. Designem per x_i, (resp. y_i) el nombre de projeccions sobre $x=0$ (resp. $y=0$) dels punts del conjunt que són a π_i. Es compleix

$$S_x=\sum_1^k x_i,\quad S_y=\sum_1^k y_i,\quad a_i\le x_iy_i,\quad a_i\le S_z,\quad S=\sum_1^k a_i.$$

Calculant surt

$$S^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 = \left(\Big(\sqrt{x_1}, \dots \sqrt{x_k}\Big) \cdot \Big(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{a_k}{\sqrt{x_k}}\Big)\right)^2 \leq$$

$$\leq \left\|\Big(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_k}\Big)\right\|^2 \left\|\Big(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{a_k}{\sqrt{x_k}}\Big)\right\|^2 = \Big(x_1 + \cdots + x_k\Big)\Big(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_k^2}{x_k}\Big) =$$

$$= S_x \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_k^2}{x_k}\right) \leq S_x \left(\frac{a_1 S_z}{x_1} + \cdots + \frac{a_k S_z}{x_k}\right) = S_x \left(\frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_k}{x_k}\right) S_z \leq$$

$$\leq S_x (y_1 + \cdots + y_k)\, S_z = S_x S_y S_z.$$

DESIGUALTATS GEOMÈTRIQUES

Miquel Amengual Covas

Les desigualtats geomètriques són tan antigues com la mateixa geometria. Així, el primer llibre dels *Elements* d'Euclides conté diversos teoremes sobre desigualtats entre angles i costats d'un triangle. El més important és, potser, la Proposició XX: *en un triangle, la suma de dos costats és més gran que el tercer.* Sobre aquesta Proposició es basen totes les desigualtats entre elements d'un triangle.

En aquest capítol establirem alguna d'aquestes desigualtats, precisament perquè el triangle és la més elemental de les figures geomètriques més simples, els polígons. Les hem seleccionat d'entre les moltíssimes que es coneixen i que es troben escampades en llibres, revistes, col·lecciones i seccions de problemes i exàmens, etc. Hem fet servir, quan ha calgut, resultats que figuren als capítols de Geometria i Desigualtats.

Notacions bàsiques

Designarem, com és habitual, els tres costats d'un triangle per a, b i c. Els angles oposats respectius es designaran per A, B i C. Es representarà per R el radi del cercle circumscrit al triangle, i per r el radi del cercle inscrit. Els radis dels cercles excrits (o exinscrits) es designaran per r_a, r_b i r_c. Les mesures de les tres altures seran h_a, h_b i h_c, i les de les tres mitjanes m_a, m_b i m_c. S serà l'àrea del triangle, i p el semiperímetre.

La desigualtat d'Euler

Començarem amb una desigualtat de les més antigues, atribuïda a Euler, que diu que *en tot triangle, el radi de la circumferència circumscrita és més gran o igual que el diàmetre de la circumferència inscrita.* És una desigualtat emblemàtica, ja que és simple i no trivial a la vegada.

Aquesta desigualtat

$$R \geq 2r, \tag{1}$$

és una conseqüència de la fórmula, també d'Euler,

$$OI^2 = R(R - 2r),$$

que relaciona el quadrat de la distància entre l'incentre I i el circumcentre O d'un triangle, amb els radis r i R. En donarem una demostració.

Tenim les igualtats elementals $(p-a)+(p-b)+(p-c) = p$, $S = rp = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$ que per simple substitució donen

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}. \tag{2}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= S\Big(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\Big) = \\ &= S\Big(\frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)}\Big) = \frac{Sabc}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{S} = 4R, \end{aligned}$$

o sigui,

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r. \tag{3}$$

Apliquem ara la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i geomètrica (*desigualtat MA-MG*) a cada un dels primers membres de (2) i (3) sortirà

$$(r_a + r_b + r_c)\Big(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\Big) \geq 9$$

que es redueix a

$$(4R + r)\frac{1}{r} \geq 9$$

de la que resulta immediatament la desigualtat d'Euler (1). La igualtat val si i només si el triangle és equilàter.

Si a (1) substituïm R i r per les seves expressions en funció dels costats del triangle, tindrem

$$\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \geq 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

que podem escriure en qualsevol de les dues formes

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$$

o bé

$$1 \geq 8\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

de les quals, tenint present que $p-a = \dfrac{-a+b+c}{2}$, etc. i que $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, etc. resulten, respectivament, les dues desigualtats

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \tag{4}$$

i

$$1 \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

que són dues de les moltes formes equivalents de la desigualtat d'Euler. (Vegeu el problema 1.)

Algunes tècniques per a resoldre desigualtats geomètriques.

Les desigualtats geomètriques poden ser difícils de resoldre perquè hi ha pocs mètodes sistemàtics per a abordar-les, fins i tot les més simples. Solen ser necessaris diversos intents d'assaig i error per a trobar la correcta combinació d'estimacions i manipulacions. A continuació es mostren algunes tècniques que, combinades amb desigualtats algebraiques clàssiques, són útils per a arribar al resultat desitjat.

(i) Tota desigualtat homogènia entre les costats a, b, c d'un triangle pot transformar-se en una desigualtat entre els seus angles A, B, C i recíprocament, mitjançant l'ús de fórmules com $a = 2R\sin A$, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, etc.

Exemple 1. Efectuant le operacions indicades en la desigualtat (4),

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) > 0,$$

obtenim

$$abc \geq a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc > 0$$

o, equivalentment,

$$3abc \geq a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2) > 2abc,$$

de la qual, dividint per $2abc$, resulta

$$\frac{3}{2} \geq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 1$$

o sigui

$$1 < \cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Exemple 2. A partir de la desigualtat MA-MG aplicada als nombres positius $bc(p-a)$, $ca(p-b)$, $ab(p-c)$ i de (2), tenim

$$\begin{aligned} bc(p-a)+ca(p-b)+ab(p-c) &\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{64(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} = \\ &= 12(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

que equival a

$$\frac{bc}{(p-b)(p-c)}+\frac{ca}{(p-c)(p-a)}+\frac{ab}{(p-a)(p-b)} \geq 12$$

és a dir,

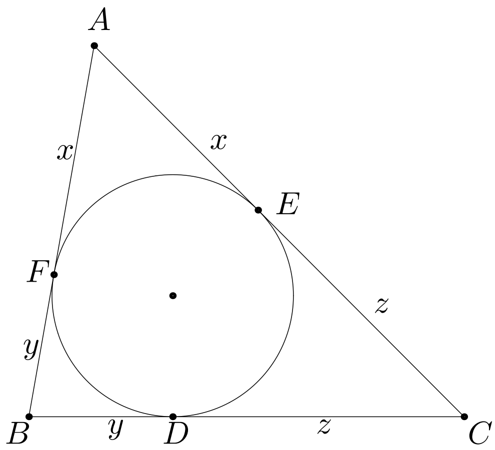
$$\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2} \geq 12$$

ja que $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ i cíclicament.

(ii) Qualsevol desigualtat entre les costats d'un triangle es pot transformar en una desigualtat entre tres nombres positius arbitraris, i recíprocament.

En efecte, considerem la circumferència inscrita en un triangle arbitrari de costats a, b, c. Com que els segments de tangent traçats a una circumferència des d'un punt exterior són iguals, tenim

$$AE = AF = x, \qquad BF = BD = y, \qquad CD = CE = z$$



i, en conseqüència

$$a = y + z, \qquad b = z + x, \qquad c = x + y,$$
$$x = p - a, \qquad y = p - b, \qquad z = p - c.$$

Aquestes equacions impliquen que per un tal triangle les distàncies entre els vèrtexs i els punts de tangència contigus dels costats amb la circumferència inscrita són nombres positius i, dualment, corresponents amb tres nombres positius existeix un triangle els costats del qual vénen donats per (4). Aquesta dualitat permet utilitzar totes les desigualtats vàlides per a qualsevol terna de nombres positius.
Vegem tres aplicacions d'aquest mètode.

Exemple 3. Si a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle, demostreu que

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Fent servir la substitució indicada

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \qquad y = \frac{c+a-b}{2}, \qquad z = \frac{a+b-c}{2}$$

la desigualtat que hem de provar s'escriu

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3$$

que és equivalent a

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6.$$

Només queda aplicar un resultat elemental: si α i β són nombres reals positius, llavors $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geq 2$, complint-se la igualtat si i només si $\alpha = \beta$. Això és immediat, però constitueix un teorema fonamental per a les desigualtats.

És compleix la igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 4. Si A, B, C són els angles d'un triangle, proveu que

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1.$$

Si expressem els quadrats de les tangents dels semiangles en funció dels costats i fem servir un a altra vegada la substitució

$$x = p - a, \qquad y = p - b, \qquad z = p - c,$$

la desigualtat proposada equival successivament a les següents:

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} + \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)} + \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)} \geq 1,$$
$$\frac{xy}{(x+y+z)z} + \frac{yz}{(x+y+z)x} + \frac{zx}{(x+y+z)y} \geq 1$$

i finalment,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z. \tag{5}$$

Ara bé, a partir de la desigualtat MA-MG tenim

$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\frac{yz}{x}}$$

és a dir

$$\frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geq y$$

i, anàlogament,

$$\frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geq z, \qquad \frac{\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}}{2} \geq x.$$

La suma d'aquestes tres últimes desigualtats dóna, precisament, (5). Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 5. (IMO 1983) Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle. Demostreu que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

i determineu-ne el cas d'igualtat.
Posem una vegada més

$$x=p-a, \qquad y=p-b, \qquad z=p-c,$$

i trobem que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=xy^3+yz^3+zx^3-xy^2z-yz^2x-zx^2y.$$

Per tant la desigualtat que hem de demostrar és equivalent a

$$xy^3+yz^3+zx^3\geq xy^2z+yz^2x+zx^2y=xyz(x+y+z)$$

o bé, dividint per xyz,

$$\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\geq x+y+z,$$

la qual es pot deduir de la desigualtat de Cauchy-Schwartz

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)\geq (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

posant'hi

$$x_1=\frac{z}{\sqrt{x}}, \quad x_2=\frac{x}{\sqrt{y}}, \quad x_3=\frac{y}{\sqrt{z}}; \qquad y_1=\sqrt{x}, \quad y_2=\sqrt{y}, \quad y_3=\sqrt{z}.$$

La igualtat es compleix si i només si els vectors (x_1,x_2,x_3) i (y_1,y_2,y_3) són linealment dependents, és a dir, quan $\dfrac{z}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}$, d'on $x=y=z$ i això correspon al triangle equilàter.
Observeu que la desigualtat també es compleix si el triangle és degenerat; en aquest cas hi ha igualtat si dos vèrtexs són coincidents.

(iii) Vegem, finalment, l'important paper que fan les funcions convexes i les funcions còncaves per a generar desigualtats a partir d'identitats.

Exemple 6. Si A, B, C són els angles d'un triangle, proveu que

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Utilitzant el fet que la funció $f(x) = \sin x$ és convexa a l'interval $[0, \pi]$ i la desigualtat de Jensen, resulta

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A + B + C}{3} = 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

La igualtat es compleix si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 7. Proveu que en tot triangle de costats a, b, c i semiperímetre p,

$$\sqrt{p} < \sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c} \leq \sqrt{3p}.$$

Per a la primera desigualtat escribim $p = (p - a) + (p - b) + (p - c)$ i tenint present que si u, v, w són tres nombres positius qualssevol es compleix $\sqrt{u + v + w} < \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$, s'obté el resultat.
Per a la segona, fem servir la convexitat de la funció $f(x) = \sqrt{x}$ a $\mathbb{R}^+$ i la desigualtat de Jensen

$$\sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c} \leq 3\sqrt{\frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{3}} = \sqrt{3p}$$

Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 8. (IMO 1961) Proveu que en tot triangle de costats a, b, c, i àrea S,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

De la desigualtat obvia

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

resulta

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \tag{*}$$

Com que l'àrea d'un triangle és igual al semiproducte de dos costats pel sinus de l'angle comprès, tenim

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$$

i, per tant, $(^*)$ s'escriu equivalentment com

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2S\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right).$$

Però la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ és cóncava a l'interval $(0, \pi)$, i per tant la desigualtat de Jensen dóna immediatament

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 3\frac{1}{\sin\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)} = 3\frac{1}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3},$$

és a dir,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Es compleix la igualtat justament per a $a = b = c$.

Exemple 9. En tot triangle de costats a, b, c i semiperímetre p,

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}.$$

Com que $\dfrac{p-a}{p} + \dfrac{p-b}{p} + \dfrac{p-c}{p} = 1$ i la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és còncava per a $x > 0$, novamentper la desigualtat de Jensen resulta

$$\frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} \geq 3\frac{1}{\dfrac{\dfrac{p-a}{p} + \dfrac{p-b}{p} + \dfrac{p-c}{p}}{3}} = 9,$$

equivalent a la proposada. Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

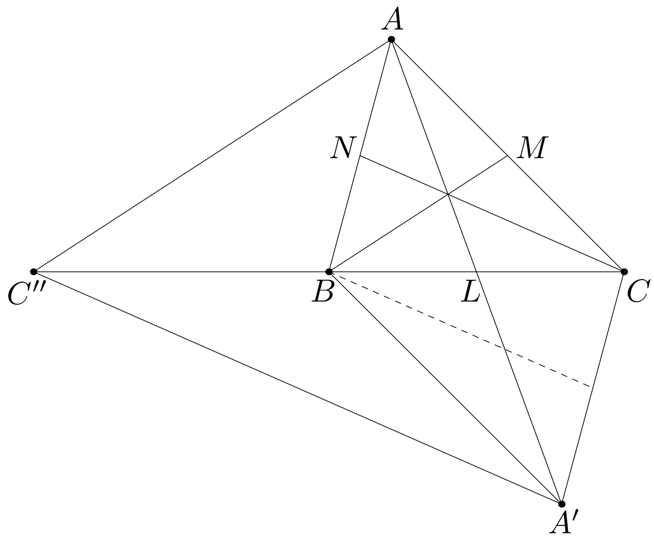
Una mica diferents de les anteriors tenim els següents exemples de desigualtats entre algunes rectes notables d'un triangle.

Exemple 10. (GE17) Proveu que en tot triangle ABC de costats A, b, c, i semiperímetre p i mitjanes m_a, m_b, m_c es compleix

$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Aprofitem aquest problema, que es troba resolt al capítol de Geometria, per exposar un mètode per a obtenir desigualtats on hi intervenen les mitjanes d'un triangle i donar una solució al problema diferent a la que s'exposa allí.
Sigui L el punt mitjà de BC i A' el punt simètric de A respecte de L. Sigui C'' el punt d'intersecció de BC amb la paral·lela a la mitjana BM traçada per A.

Volem provar que els costats del triangle $AC''A'$ mesuren m_a, m_b, m_c, i les seves mitjanes $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}c$.



Tenim

$$AA' = 2 \cdot AM = 2m_a$$

$$AC'' = 2 \cdot BM = 2m_b \quad \text{(ja que } BM \text{ és paral·lela mitjana en el triangle } CAC''\text{)}$$

i que la mitjana CN és igual a la paral·lela mitjana BP' en el triangle $CC''A'$ com a conseqüència de la igualtat de $\triangle CAN$ i $\triangle BA'P'$ (per ser $ABA'C$ un paral·lelogram, $CA = BA'$, $\angle CAN = \angle BA'P'$ i $A'P' = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2}CN = AN$).
Per tant

$$A'C'' = 2 \cdot BP' = 2 \cdot CN = 2m_c.$$

Per altra banda, el punt B és el baricentre del triangle $AC''A'$ perquè està sobre la mitjana $C''M$ i compleix $\dfrac{C''B}{BM} = \dfrac{2 \cdot BM}{BM} = 2$; les mitjanes de $\triangle AC''A'$ mesuren doncs

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot C''B &= \frac{3}{2} \cdot BC = \frac{3}{2}a, \\ \frac{3}{2} \cdot A'B &= \frac{3}{2} \cdot CA = \frac{3}{2}b, \\ \frac{3}{2} \cdot AB &= \frac{3}{2}c. \end{aligned}$$

A més a més, és immediat observar que

$$\text{Àrea}\triangle AC''A' = 3S,$$

essent S l'àrea del triangle ABC.

Aquests resultats ens permeten concloure que el semiperímetre del triangle $AC''A'$ és igual a

$$m_a + m_b + m_c,$$

el radi de la seva circumferència inscrita és igual a

$$\frac{3S}{m_a + m_b + m_c}$$

i el de la seva circumferència circumscrita

$$\frac{2m_a m_b m_c}{3S},$$

per la qual cosa tota desigualtat entre R, r, p del $\triangle ABC$ pot transformar-se en una altra aplicant-la al triangle $AC''A'$.
Passem ara a establir la desigualtat proposada en aquest exemple.
Tenim

$$AA' = 2m_a < AB + BA' = b + c,$$

o sigui que,

$$2m_a < b + c$$

i, anàlogament

$$2m_b < c + a, \qquad 2m_c < a + b$$

la suma de les quals dóna

$$m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Si apliquem aquesta desigualtat al triangle $AC''A'$, obtenim

$$\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c < 2m_a + 2m_b + 2m_c$$

és a dir,

$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c.$$

En la solució citada es prova que els coeficients obtinguts, $\frac{3}{2}$ i 2, són els millors.

Exemple 11. Si h_a, h_b, h_c són les altures d'un triangle de costats a, b, c i r el radi de la seva circumferència inscrita,

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

Dividint $a+b+c=2p$ per $2S=2rp=ah_a=bh_b=ch_c$ obtenim

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

i per la desigualtat MA-MG,

$$(h_a+h_b+h_c)\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big)\geq 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{h_ah_bh_c}}=9$$

que es redueix a

$$(h_a+h_b+h_c)\frac{1}{r}\geq 9,$$

equivalent a la proposada. Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 12. Siguin v_a, v_b, respectivament, les bisectrius interiors dels angles A i B d'un triangle qualsevol.
Proveu que si $A<B$, llavors $v_a>v_b$.
Donat que

$$v_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}\qquad \text{i}\qquad v_b^2=\frac{4cap(p-b)}{(c+a)^2},$$

obtenim

$$\begin{aligned}v_a^2-v_b^2=4cp\Big(\frac{b(p-a)}{(b+c)^2}-\frac{a(p-b)}{(c+a)^2}\Big)&=\\ =\frac{2cp}{(b+c)^2(c+a)^2}\big(b(-a+b+c)(c+a)^2-a(a-b+c)(b+c)^2\big)&=\\ =\frac{2cp}{(b+c)^2(c+a)^2}\big(c^3(b-a)+c^2(b^2-a^2)+3abc(b-a)+ab(b^2-a^2)\big)&.\end{aligned}$$

Donat que $A<B$ implica $a<b$, resulta $v_a>v_b$.

Problemes

DG1. Demostreu que la longitud d'un costat del triangle de Morley d'un triangle T donat, és menor que un terç de la longitud del costat més petit de T.
(El triangle de Morley de T és el triangle equilàter amb vèrtexs als punts d'intersecció de les trisectrius interiors adjacents dels angles de T. Vegeu el problema GE12.)

DG2. Demostreu que les següents desigualtats entre elements d'un triangle

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$
$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \sin B \sin C} \geq 4,$$
$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C,$$
$$\frac{R}{r^2} \geq \frac{2p^2}{r r_a r_b r_c},$$
$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc \quad \text{(IMO 1964)}$$

són formes equivalents de la desigualtat d'Euler.

DG3. Si R és el radi de la circumferència circumscrita a un triangle i r el de la seva circumferència inscrita, proveu que

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{5}{2}.$$

La igualtat es compleix només quan el triangle és equilàter.

DG4. Demostreu que si v_a, v_b, v_c són les bisectrius interiors d'un triangle de semiperímetre p,

$$v_a + v_b + v_c \leq p\sqrt{3}$$

És compleix la igualtat si i només si el triangle és equilàter.

DG5. *(Teorema d'Erdös-Mordell)* Si P és punt interior a un triangle ABC i PA_1, PB_1, PC_1 són les perpendiculars traçades per P als costats BC, CA i AB, llavors

$$PA + PB + PC \geq 2\big(PA_1 + PB_1 + PC_1\big).$$

DG6. Amb la notació del problema anterior, demostreu que

$$2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right) \leq \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PB_1} + \frac{1}{PC_1}.$$

DG7. Amb la notació del problema DG5, proveu que

$$PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1 \leq \frac{1}{8} PA \cdot PB \cdot PC.$$

DG8. Siguin $A \geq B \geq C > 0$ els angles d'un triangle. Proveu que

$$\frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos B} \leq \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C}.$$

DG9. Donat el triangle ABC, d'incentre I, siguin R_a, R_b, R_c els radis de les circumferències circumscrites als triangles IBC, ICA, IAB, respectivament. Demostreu que

$$4 \sum_{\text{cíclica}} \frac{R_a^2 + R_b^2}{ab} \geq 2 + \sum_{\text{cíclica}} \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

DG10. En un triangle ABC, sigui r el radi de la circumferència inscrita i ρ_A el radi de la circumferència tangent a AB, AC i exteriorment a la seva circumferència inscrita; definim ρ_B i ρ_C anàlogament. Demostreu que

$$\rho_A + \rho_B + \rho_C \geq r.$$

DG11. Sigui G el baricentre i O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC. Demostreu que

$$0 \leq OG \leq \frac{R}{3},$$

essent R el radi de la circumferència circumscrita.

DG12. Demostreu que en tot triangle de costats a, b, c i radi de la circumferència circumscrita igual a R, es compleix la següent desigualtat

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3\sqrt{3}R.$$

DG13. Dues circumferències concèntriques tenen, respectivament, radis R i R_1, $R_1 > R$. El quadrilàter $ABCD$ està inscrit a la petita i el $A_1B_1C_1D_1$ a la gran. El punt A_1 pertany a la prolongació de CD, B_1 a la de DA, C_1 a la de AB i D_1 a la de BC. Proveu que

$$\frac{\text{Àrea } (A_1B_1C_1D_1)}{\text{Àrea } (ABCD)} \geq \frac{R_1^2}{R^2}.$$

DG14. El tetràedre $ABCD$ té tres angles diedres rectes en el vèrtex D. Si la longitud de l'altura corresponent al vèrtex D és h i el radi de la circumferència inscrita al triangle ABC és r, demostreu que

$$h \geq r\sqrt{2}.$$

DG15. Siguin AA', BB', CC' les altures d'un triangle acutangle ABC i A_1, B_1, C_1 els segons punts d'intersecció de les rectes AA', BB', CC' amb la circumferència circumscrita al triangle ABC. Demostreu que

$$AA_1^2 \sin 2A + BB_1^2 \sin 2B + CC_1^2 \sin 2C > 24S_0,$$

on S_0 indica l'àrea del triangle $A'B'C'$.

DG16. En un triangle ABC escollim punts arbitraris $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$, $N \in LM$, $R \in MK$ i $F \in KL$. Si S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 i S denoten, respectivament, les àrees dels triangles AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN i ABC, demostreu que

$$S \geq 8\sqrt[6]{S_1S_2S_3S_4S_5S_6}.$$

DG17. Siguin a, b, c els costats d'un triangle, p el seu semiperímetre i r el radi de la seva circumferència inscrita. Demostreu que

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

DG18. Els tres vèrtexs d'un triangle de costats a, b, c són punts de coordenades enteres en el pla euclidià. Si R és el radi de la seva circumferència circumscrita, proveu que

$$abc \geq 2R.$$

DG19. Si designem per $S(x,y,z)$ l'àrea d'un triangle de costats x, y, z, proveu que per a dos triangles qualssevol de costats respectius a, b, c i a', b', c', es compleix

$$\sqrt{S(a,b,c)} + \sqrt{S(a',b',c')} \leq \sqrt{S(a+a',b+b',c+c')}.$$

DG20. Sigui h l'altura d'un tetràedre regular i h_1, h_2, h_3, h_4 les distàncies d'un punt interior a les seves cares. Proveu que

a) $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$.

b) $\dfrac{h-h_1}{h+h_1} + \dfrac{h-h_2}{h+h_2} + \dfrac{h-h_3}{h+h_3} + \dfrac{h-h_4}{h+h_4} \geq \dfrac{12}{5}$.

DG21. Si $ABCD$ és un quadrilàter convex i anomenem $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ i $DA = d$, demostreu que

$$S \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$$

on S és l'àrea del quadrilàter $ABCD$.

DG22. Sigui ABC un triangle i D el punt del costat BC tal que la circumferència inscrita en $\triangle ABD$ i la circumferència excrita relativa al costat DC de $\triangle ADC$ tenen el mateix radi ρ_1. Definim ρ_2 i ρ_3 anàlogament. Demostreu que

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \geq \frac{9}{4}r,$$

essent r el radi de la circumferència inscrita en $\triangle ABC$.

DG23. Siguin A', B', C', respectivament, els punts d'intersecció de les prolongacions de les bisectrius interiors dels angles A, B, C d'un triangle amb la seva circumferència circumscrita. Si S denota l'àrea de $\triangle ABC$ i S' l'àrea de $\triangle A'B'C'$, demostreu la desigualtat

$$16\big(S'\big)^3 \geq 27R^4 S,$$

essent R el radi de la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$.

DG24. Donat un triangle ABC de costats a, b, c i un triangle $A'B'C'$ de costats $\dfrac{b+c}{2}$, $\dfrac{c+a}{2}$, $\dfrac{a+b}{2}$, demostreu que

$$r' \geq r.$$

essent r i r', respectivament, els radis de les circumferències inscrites en $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$.

DG25. Designem per T i T' dos triangles de costats a, b, c i a', b', c', respectivament, sent

$$\big(a'\big)^2 = 2a(p-a), \qquad \big(b'\big)^2 = 2b(p-b), \qquad \big(c'\big)^2 = 2c(p-c).$$

Proveu que

$$\text{(i) } p \geq p', \qquad \text{(ii) } R \geq R', \qquad \text{(iii) } r' \geq r \qquad \text{(iv) } \frac{S'}{(p')^2} \geq \frac{S}{p^2}$$

sent p, R, r, S, respectivament, el semiperímetre, el radi de la circumferència circumscrita, el radi de la circumferència inscrita i l'àrea de T, i, anàlogament per a T'.

DG26. Si a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle de semiperímetre p i àrea S, demostreu que

$$\left(\frac{p}{p-a}\right)^{\frac{p}{p-a}} + \left(\frac{p}{p-b}\right)^{\frac{p}{p-b}} + \left(\frac{p}{p-c}\right)^{\frac{p}{p-c}} \geq \frac{p^4}{S^2}.$$

DG27. Sigui M un punt interior del tetràedre $A_1A_2A_3A_4$. Les rectes A_1M, A_2M, A_3M, A_4M intersequen les cares oposades respectivament en els punts A_1', A_2', A_3', A_4'. Demostreu que

$$\frac{MA_1'}{MA_1} + \frac{MA_2'}{MA_2} + \frac{MA_3'}{MA_3} + \frac{MA_4'}{MA_4} \geq \frac{4}{3}.$$

DG28. Sigui O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC i R el radi de la seva circumferència circumscrita.
Si A' és el segon punt d'intersecció de la recta OA amb la circumferència circumscrita a $\triangle BOC$, B' el segon punt d'intersecció de la recta BO amb la circumferència circumscrita a $\triangle COA$ i C' el segon punt d'intersecció de la recta CO amb la circumferència circumscrita a $\triangle AOB$, demostreu que

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geq 8R^3.$$

DG29. Demostreu que si a, b, c, d són les longituds dels costats d'un quadrilàter i si P és el seu perímetre, llavors

$$\frac{abc}{d^2} + \frac{bcd}{a^2} + \frac{cda}{b^2} + \frac{dab}{c^2} > P,$$

llevat que $a = b = c = d$.

DG30. Si les mitjanes relatives als costats AB i AC d'un triangle ABC són perpendiculars, proveu que

$$\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}.$$

DG31. Sigui P un punt interior a un triangle ABC de costats a, b, c i sigui A' el segon punt que la recta AP talla la circumferència per B, P, C. Definim B' i C' anàlogament. Proveu que el perímetre p de l'hexàgon $AB'CA'BC'$ compleix

$$p \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right).$$

DG32. Sigui P un punt interior al triangle equilàter ABC. Si les rectes AP, BP, CP tallen els costats BC, CA, AB respectivament en els punts A_1, B_1, C_1, demostreu que

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

DG33. Siguin a, b, c els costats d'un triangle de semiperímetre p i àrea S. Demostreu que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{p\sqrt{3}}{2S}.$$

DG34. Demostreu que la distància entre dos punts interiors qualssevol d'un triangle (respectivament tetràedre) està fitada superiorment per la longitud del major dels seus costats (respectivament arestes).

DG35. En un triangle ABC, de semiperímetre p, denotem per A', B', C', respectivament, els peus de les bisectrius interiors traçades des dels vèrtexs A, B, C sobre els costats oposats. Demostreu que

$$\frac{bc\sin\dfrac{A}{2}}{B'C'} + \frac{ca\sin\dfrac{B}{2}}{C'A'} + \frac{ab\sin\dfrac{C}{2}}{A'B'} \leq 2p.$$

DG36. Demostreu que en tot triangle ABC es compleix

$$\cos^2\frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R},$$

essent R i r, respectivament, els radis de les circumferències circumscrita i inscrita del $\triangle ABC$. Quan val la igualtat?

DG37. Es prolonguen les bisectrius interiors dels angles A, B, C d'un triangle ABC fins que tallen la seva circumferència circumscrita en els punts T_1, T_2, T_3, respectivament, i es tracen les perpendiculars T_1H_1, T_2H_2, T_3H_3 als costats CA, AB, BC. Demostreu que

$$T_1H_1 + T_2H_2 + T_3H_3 \leq 3R,$$

sent R el radi de la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$.

DG38. En un triangle rectangle de catets a, b i hipotenusa c, proveu que

$$4\big(ac + b^2\big) \leq 5c^2.$$

DG39. Construïm un triangle T_1 que té per costats les mitjanes d'un triangle rectangle T. Si R i R_1 són, respectivament, els radis de les circumferències circumscrites a T i a T_1, proveu que

$$R_1 \geq \frac{5R}{6}.$$

DG40. (IMO 1996) Sigui $ABCDEF$ un hexàgon convex tal que AB és paral·lel a ED, BC és paral·lel a FE i CD és paral·lel a AF. Siguin R_A, R_C i R_E els radis de les circumferències circumscrites als triangles FAB, BCD i DEF, respectivament; i sigui p el perímetre de l'hexàgon. Proveu que

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{p}{2}.$$

DG41. Sigui P un punt interior a un quadrilàter convex $ABCD$ d'àrea S. Demostreu que

$$S \leq \frac{\big(PA + PC\big)BD + \big(PB + PD\big)AC}{4}.$$

DG42. Siguin A, B, C i D punts fixos arbitraris de l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ i P un punt variable. Demostreu que la suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ és mínima quan P és el punt mitjà del segment que uneix els punts mitjans de AC i BD.

DG43. Demostreu que en un quadrilàter convex, la raó entre la suma del quadrats de les diagonals i la suma d'aquestes és menor que el semiperímetre del quadrilàter.

DG44. Demostreu que en un quadrilàter convex de costats a, b, c, d i àrea S es compleix la següent desigualtat

$$4S \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

DG45. Si a, b, c, d són les longituds dels costats d'un quadrilàter convex i e, f les de les seves diagonals, proveu que

$$\max(a, b, c, d) \geq \frac{\sqrt{e^2 + f^2}}{2}.$$

DG46. Si A_1, A_2, A_3, A_4 són els vèrtexs d'un tetràedre, r_i el radi de l'esfera excrita relativa a la cara oposada al vèrtex A_i i r el radi de l'esfera inscrita, demostreu que

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{r_i + r}{r_i - r} \geq 12.$$

Mostra de solucions.

Solució del problema DG5

Donat que $\angle AB_1P = 90^\circ$ i $\angle AC_1P = 90^\circ$, els punts B_1 i C_1 estan sobre la circumferència de diàmetre PA. El teorema dels sinus aplicat al $\triangle AB_1C_1$ dóna

$$PA \cdot \sin A = B_1C_1.$$

Anàlogament, els punts A_1 i C_1 estan sobre la circumferència de diàmetre PB. Els angles $\angle BPC_1$ i $\angle BA_1C_1$ són iguals perquè són inscrits a aquesta circumferència i determinen el mateix arc; en conseqüència, si C_2 és la projecció ortogonal de C_1 sobre BC, els triangles PC_1B i $A_1C_2C_1$ són semblants i per tant tenim

$$\frac{C_2A_1}{A_1C_1} = \frac{PC_1}{PB} \Longrightarrow C_2A_1 = \frac{PC_1 \cdot A_1C_1}{PB} = PC_1 \cdot \sin B$$

on l'última igualtat s'obté en aplicar el teorema dels sinus al $\triangle BA_1C_1$.

El mateix raonament, aplicat als punts A_1 i B_1 sobre la circumferència de diàmetre PC, ens permet concloure que

$$A_1B_2 = PB_1 \cdot \sin C,$$

essent B_2 la projecció ortogonal de B_1 sobre BC.
Per tant

$$PA \cdot \sin A = B_1C_1 \geq \text{projecció de } B_1C_1 \text{ sobre } BC = C_2B_2 =$$
$$= C_2A_1 + A_1B_2 = PC_1 \cdot \sin B + PB_1 \cdot \sin C$$

o sigui,

$$PA \geq \frac{b}{a}PC_1 + \frac{c}{a}PB_1,$$

aquesta última s'obté aplicant el teorema dels sinus al $\triangle ABC$ i de la qual resulten, per permutació circular, les dues següents

$$PB \geq \frac{c}{b}PA_1 + \frac{a}{b}PC_1, \qquad PC \geq \frac{a}{c}PB_1 + \frac{b}{c}PA_1.$$

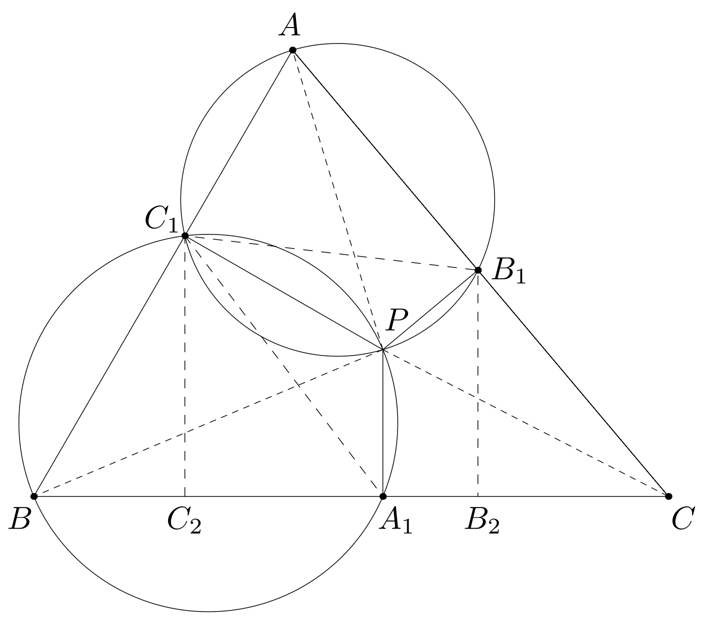
Així doncs

$$PA + PB + PC \geq \Big(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\Big)PA_1 + \Big(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\Big)PB_1 + \Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\Big)PC_1.$$

Cada un dels parèntesis és igual o major que 2 (vegeu l'exemple 3) i, per tant resulta immediatament que

$$PA + PB + PC \geq 2\big(PA_1 + PA_2 + PA_3\big).$$

Es compleix la igualtat si i només si el triangle ABC és equilàter i P és el seu centre.



En particular, si P és l'incentre de $\triangle ABC$ i r el radi de la seva circumferència inscrita

$$PA = r\text{cosec}\,\frac{A}{2}, \qquad PB = r\text{cosec}\,\frac{B}{2}, \qquad PC = r\text{cosec}\,\frac{C}{2}, \qquad PA_1 = PB_1 = PC_1 = r$$

i deduïm la següent desigualtat trigonomètrica

$$\text{cosec}\,\frac{A}{2} + \text{cosec}\,\frac{B}{2} + \text{cosec}\,\frac{C}{2} \geq 6$$

vàlida per als angles A, B, C d'un triangle.

Solució del problema DG27

Sigui E i F, respectivament, els peus de les perpendiculars traçades per A_1 i M a la cara de vèrtexs A_2, A_3, A_4.

Si denotem per V el volum del tetràedre donat i per V_1 el del $MA_2A_3A_4$, tenim

$$\frac{MA_1'}{MA_1} = \frac{MA_1'}{A_1A_1' - MA_1'} = \frac{1}{\dfrac{A_1A_1'}{MA_1'} - 1},$$

on

$$\frac{A_1A_1'}{MA_1'} = \frac{A_1E}{MF} = \frac{V}{V_1}$$

ja que els volums de dues piràmides de la mateixa base són proporcionals a les seves altures, resulta

$$\frac{MA_1'}{MA_1} = \frac{1}{\dfrac{V}{V_1} - 1} = \frac{V_1}{V - V_1}.$$

Anàlogament, i amb la notació corresponent,

$$\frac{MA_2'}{MA_2} = \frac{V_2}{V - V_2}, \qquad \frac{MA_3'}{MA_3} = \frac{V_3}{V - V_3}, \qquad \frac{MA_4'}{MA_4} = \frac{V_4}{V - V_4},$$

essent $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, $V_1 > 0$, $V_2 > 0$, $V_3 > 0$, $V_4 > 0$.

D'aquesta manera, la desigualtat proposada s'escriu equivalentment com

$$\frac{V_1}{V - V_1} + \frac{V_2}{V - V_2} + \frac{V_3}{V - V_3} + \frac{V_4}{V - V_4} \geq \frac{4}{3}$$

la validesa de la qual establim a continuació.

Aplicant la desigualtat MA-MG als nombres positius $V-V_1$, $V-V_2$, $V-V_3$, $V-V_4$ i $\dfrac{1}{V-V_1}$, $\dfrac{1}{V-V_2}$, $\dfrac{1}{V-V_3}$, $\dfrac{1}{V-V_4}$ resulta

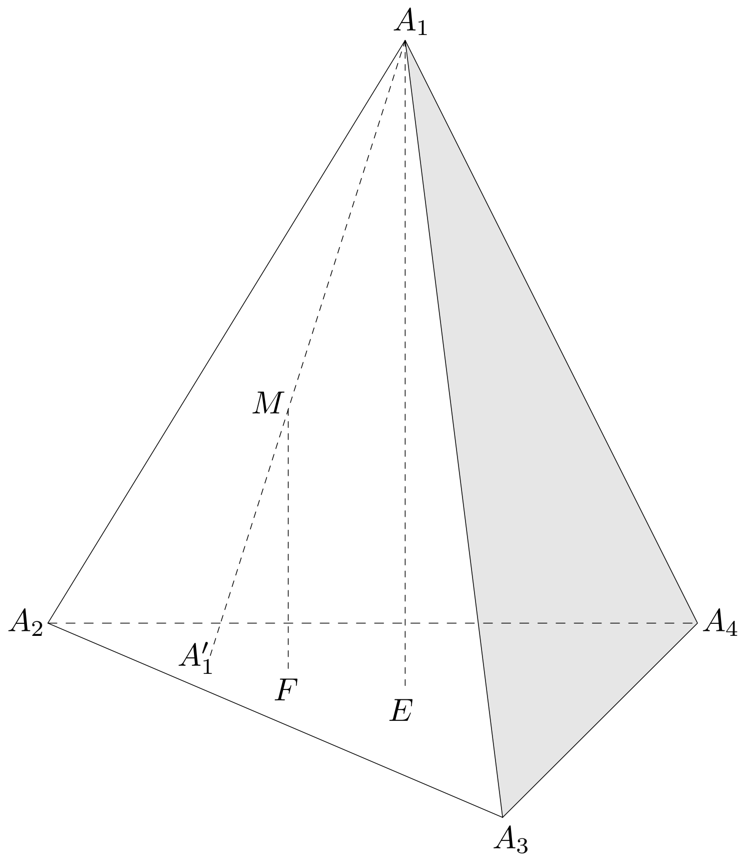
$$\begin{aligned}
&3\left(\frac{V_1}{V-V_1}+\frac{V_2}{V-V_2}+\frac{V_3}{V-V_3}+\frac{V_4}{V-V_4}+4\right)=\\
=&3\left(\left(\frac{V_1}{V-V_1}+1\right)+\left(\frac{V_2}{V-V_2}+1\right)+\left(\frac{V_3}{V-V_3}+1\right)+\left(\frac{V_4}{V-V_4}+1\right)\right)=\\
=&3V\left(\frac{1}{V-V_1}+\frac{1}{V-V_2}+\frac{1}{V-V_3}+\frac{1}{V-V_4}\right)=\\
=&\Big((V-V_1)+(V-V_2)+(V-V_3)+(V-V_4)\Big)\left(\frac{1}{V-V_1}+\frac{1}{V-V_2}+\frac{1}{V-V_3}+\frac{1}{V-V_4}\right)\geq\\
\geq&4^2=16
\end{aligned}$$

És a dir,

$$3\left(\frac{V_1}{V-V_1}+\frac{V_2}{V-V_2}+\frac{V_3}{V-V_3}+\frac{V_4}{V-V_4}+4\right)\geq 16$$

i per tant

$$\frac{V_1}{V-V_1}+\frac{V_2}{V-V_2}+\frac{V_3}{V-V_3}+\frac{V_4}{V-V_4}\geq\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}.$$



Solució del problema DG45

Sigui $ABCD$ el quadrilàter de l'enunciat i posem $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ i $f = BD$.

Si M i N són, respectivament, els punts mitjans de les diagonals AC i BD, el teorema de la mitjana aplicat als triangles ABD, BCD i ANC dóna

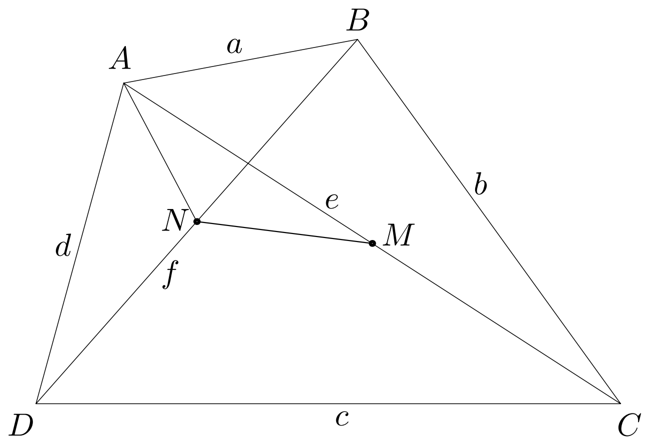
$$AN^2 = \frac{2a^2 + 2d^2 - f^2}{4}, \qquad CN^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - f^2}{4},$$
$$MN^2 = \frac{2 \cdot AN^2 + 2 \cdot CN^2 - AC^2}{4} = \frac{1}{4}\big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2\big).$$

Però $MN^2 \geq 0$, i en conseqüència $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2$ i, per tant,

$$4 \max\big(a^2, b^2, c^2, d^2\big) \geq e^2 + f^2$$

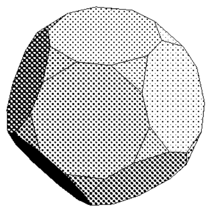
que és equivalent a la desigualtat proposada.

Es compleix la igualtat si i només si $MN = 0$ i $a = b = c = d$, és a dir, si $ABCD$ és un rombe.



DISSECCIONS GEOMÈTRIQUES

Joan Trias i Pairó



1. L'art de comptar en Geometria

1.1 Introducció

En geometria podem considerar *configuracions geomètriques* formades per rectes, plans, rectangles, circumferències, esferes o altres objectes menys "regulars". Aquestes configuracions descomponen l'espai en parts produint el que anomenarem **disseccions geomètriques**, com es pot veure en algunes de les il·lustracions de la figura 1.

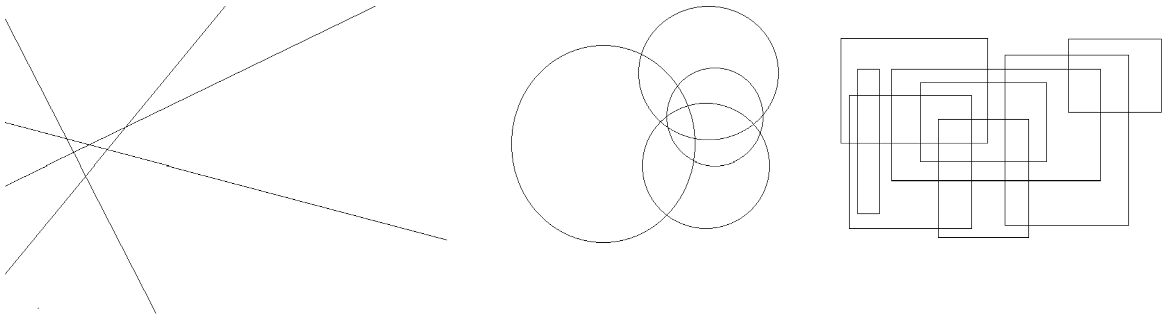


Figura 1. *Disseccions geomètriques en el pla creades per rectes, circumferències i rectangles.*

Aquestes configuracions generen disseccions geomètriques de l'espai, donen lloc a elements tals com *vèrtexs, cares i arestes*, i pot ser d'interès saber-los *comptar* o almenys avaluar-ne l'ordre de magnitud o tenir-ne alguna fita superior (vegeu figura 2).

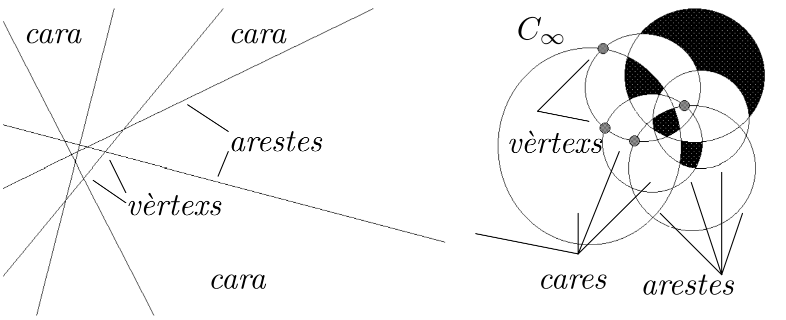


Figura 2. *Disseccions amb vèrtexs, arestes, cares (algunes les hem indicat gràficament omplint-les de negre), algunes fitades i d'altres no; en el cas que hi hagi un única cara no fitada la indicarem per* C_∞.

A la dissecció per rectes en el pla es formen vèrtexs (interseccions de rectes), "arestes" (segments i semirectes) i "cares", que poden ser fitades o no. A la dissecció per circumferències es formen vèrtexs, arestes (arcs de circumferència), totes fitades i "cares" (parts del pla limitades per arestes); en aquest tipus de dissecció hi ha una única cara no fitada; la resta són cares fitades.

Actualment aquest no és només un tema d'interès acadèmic o de curiositat intelectual, ja que aquestes estructures apareixen en aplicacions de *computació geomètrica*, com per exemple en *gràfics per ordinador* o *disseny geomètric assistit per ordinador*; per al disseny i anàlisi dels algorismes subjacents cal saber comptar o avaluar d'alguna manera el nombre d'elements geomètrics d'una estructura geomètrica.

Ens volem centrar en aquesta part de la publicació en problemes de disseccions geomètriques tant al pla com a l'espai i també en problemes que s'hi poden reduir, com són, per exemple, alguns problemes relatius a políedres; un dels avantatges és que sense requerir coneixements molt específics o amplis previs es poden formular enunciats ben entenedors, que es poden mantenir a un nivell elemental, enunciats prou interessants com perquè siguin atractius i al mateix temps, pel que fa al nivell, prou accessibles perquè siguin abordables.

En aquesta introducció veurem algunes tècniques, alguns resultats, i diversos exemples d'entrenament en el problema de comptar objectes geomètrics; seguirà al final una col·lecció d'enunciats per resoldre.

1.2 Les eines de l'ofici

Saber comptar és difícil: exigeix enginy, entrenament, experiència, és tot un art. Ara bé, també hi ha disponibles certes eines bàsiques que podem anomenar eines de l'ofici de comptar, que ens són útils tant per comptar elements en configuracions o disseccions geomètriques com en d'altres circumstàncies.

Dominar l'ofici exigeix l'ús de certes tècniques i disposar de resultats diversos; esmentem el més elemental:

- Disponibilitat d'identitats aritmètiques de sumació tancada.
- La inducció matemàtica, en diverses variants.
- Eines i conceptes de combinatòria elemental (i avançada, però no en aquest context).
- Mètodes elementals de resolució de recurrències.
- Relacions especials, com per exemple, la fórmula d'Euler per a grafs planars i altres.

2. Eines elementals

Exposem en aquest apartat només les eines més elementals que ens poden ser útils per comptar elements en configuracions geomètriques (i en d'altres situacions).

2.1 Identitats aritmètiques de sumació tancada

Algunes identitats aritmètiques interessants són expressions "tancades" de sumes que es presenten amb relativa freqüència, com són per exemple, les següents:

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$1+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es poden provar de diverses maneres; una de les més usuals és aplicant el mètode d'inducció, com veurem a l'apartat següent.

En moltes ocasions aquestes identitats s'utilitzen de forma auxiliar per derivar-ne conclusions més complexes.

Cal tenir present que de vegades es presenten segons diverses variants, com per exemple $1+2+3+\cdots+(n-1)$; s'aplica la mateixa fórmula, però en comptes de n escrivim $n-1$ i resulta, per tant, $1+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)((n-1)+1)=\frac{1}{2}(n-1)n$. O també es presenta en situacions en les que hem de sumar, per exemple, $3+4+\cdots+n$; aleshores és $3+4+\cdots+n=(\sum_{k=1}^{n} k)-1-2=\frac{1}{2}n(n+1)-3$.

En certes ocasions algunes identitats d'aquests tipus les descobrireu a partir d'experiments modestos, possiblememt comptant sobre diversos exemples concrets de configuracions; un cop hom està convençut de la certesa d'una identitat, pot intentar de provar-la per inducció.

2.2 La inducció matemàtica

La inducció matemàtica és un mètode de demostració que sol ser molt útil en problemes d'enumeració i de còmput del nombre d'elements de diversos tipus en configuracions geomètriques (i molts altres àmbits de la matemàtica); les situacions a les que hom pot aplicar aquest mètode són essencialment aquelles en les quals es tracta de demostrar una propietat $P(n)$ que s'enuncia en termes dels nombres naturals $n \in \mathbb{N}$.

Un primer exemple de demostració inductiva. Vegem la demostració inductiva de la primera de les identitats, segons l'esquema:

$$\begin{aligned}&P(1)\\&P(n) \Rightarrow P(n+1),\end{aligned}$$

on $P(n)$ és la propietat de ser certa la igualtat

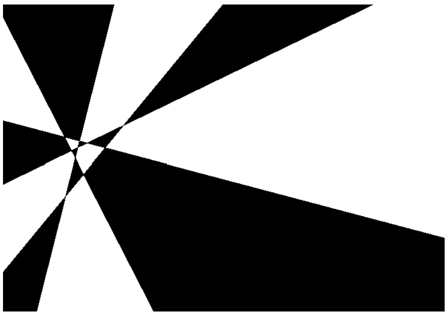
$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Pas 1. En primer lloc s'ha d'establir la fórmula per al primer valor per al qual tingui sentit, que és en aquest cas $n=1$; ara bé, per a $n=1$ la prova és una comprovació rutinària de la coincidència dels dos membres de la igualtat a demostrar.

Pas 2. En segon lloc, hem de suposar que la identitat és certa per a n per *hipòtesi d'inducció* i provar que és certa per al valor $n+1$; aquest pas, juntament amb el primer, establirà la propietat per a tot $n \geq 1$. Suposant, doncs, que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es compleix, podem escriure, aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

com volíem demostrar. Anàlogament provaríem d'altres identitats de sumació similars a aquesta.



Inducció en geometria. Considerem una descomposició del pla per n rectes en regions poligonals. Suposem que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirrecta o un segment de longitud no nul·la. Proveu que les regions es poden acolorir globalment amb 2 colors, de tal manera que les que tinguin frontera comuna siguin de colors diferents. El lector provarà de convencer-se que l'enunciat és correcte veient que és possible d'acolorir amb dos colors afegint rectes successives a les disseccions que es van obtenint a partir de $n = 1$; presentaren aquí la demostració formal inductiva, i farem la demostració per inducció sobre n; suposem que els colors són "blanc" (B) i "negre" (N).

Demostració.

Pas 1. Per a $n = 1$ és cert trivialment assignant colors diferents als dos semiplans produïts per l'única recta.

Pas 2. Suposem que per hipòtesi d'inducció es poden 2-acolorir (segons el criteri de l'enunciat) totes les disseccions per n rectes; en afegir una $(n+1)$-èsima recta r arbitrària (figura 3) resulta una descomposició del pla en dos semiplans S_1 i S_2.

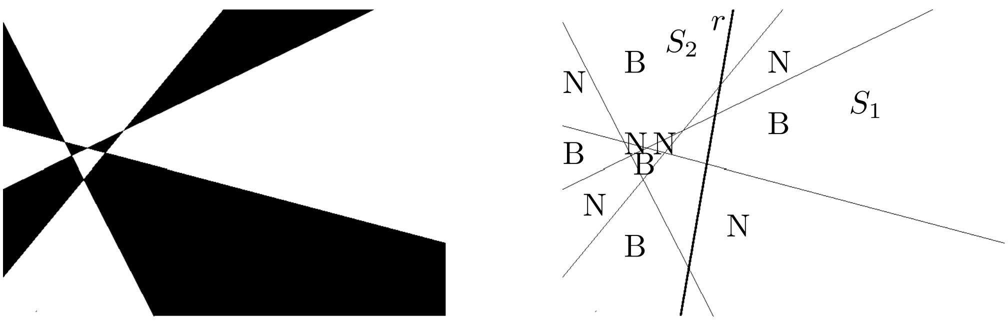


Figura 3

Considerem les coloracions sobre S_1 i S_2 induïdes per la 2-coloració general corresponent a les n rectes: això no constitueix una 2-coloració de la dissecció produïda per les $n + 1$ rectes, ja que les cares noves que tenen per frontera comú segments o semirectes sobre r tenen la mateixa coloració. Vegem que podem obtenir una 2-coloració global (figura 4):

1. Mantenim la coloració sobre un dels semiplans, per exemple S_2; això deixa establerta una 2-coloració sobre aquest semiplà.

2. Intercanviem els colors de totes les regions de l'altre semiplà, S_1, és a dir, els blancs passen a negres i els negres passen a blancs: això manté una 2-coloració sobre S_2 i, per l'intercanvi del color de les zones fronteres amb S_1, obtenim la "compatibilitat" amb la 2-coloració de S_1; per tant, globalment s'ha produït una 2-coloració.

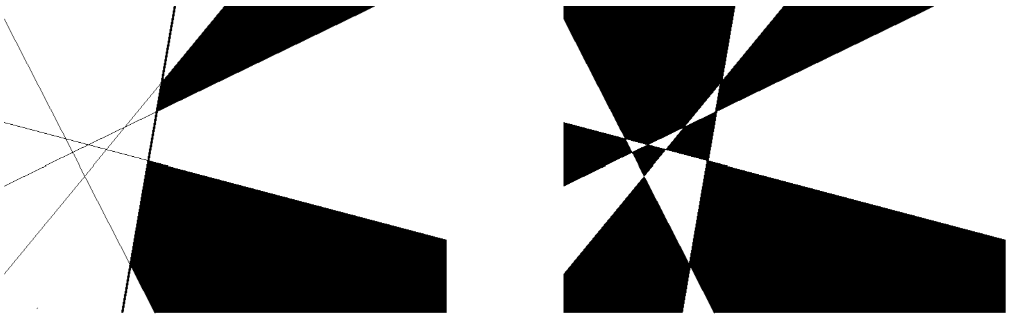


Figura 4

2.3 Combinatòria elemental

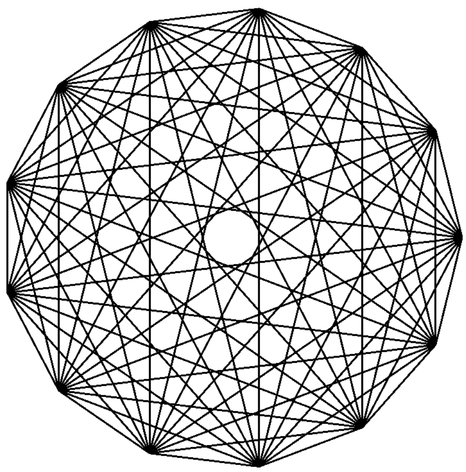
Les eines de la combinatòria són molt útils per comptar elements de configuracions geomètriques; aquí no anirem més enllà de les més elementals. Recordem simplement que el *coeficient binomial* és

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{si } n \geq k \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

on

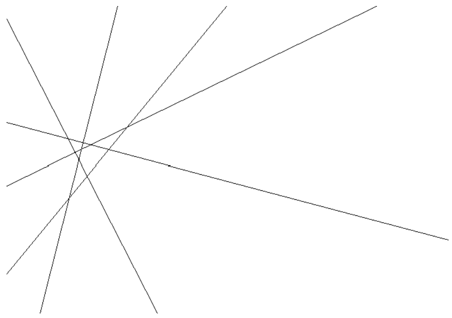
$$k! = \begin{cases} k(k-1)\cdots 2\cdot 1, & \text{si } k > 0 \\ 1, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Vegem dos exemples senzills:



Exemple 1: Les diagonals d'un polígon. Les diagonals d'un polígon són els segments determinats per parelles de vèrtexs no consecutius inclosos a l'interior del polígon; en el cas d'un polígon convex, qualsevol segment determinat per dos vèrtexs no adjacents està contingut en el polígon i n'és, per tant, una diagonal. Considerem un polígon convex de n vèrtexs; es tracta de calcular el nombre de diagonals del polígon: cada diagonal està determinada per una parella de vèrtexs, sense que importi l'ordre, i el nombre de parelles de vèrtexs que es poden escollir en un conjunt de n vèrtexs és $\binom{n}{2}$, però aquest no és el nombre de diagonals,

ja que també hi són comptats en aquest còmput els costats del polígon, determinats per parelles de vèrtexs consecutius; atès que hi ha n costats, finalment el nombre de diagonals buscat serà $d = \binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3)$.



Exemple 2: Disseccions planes per rectes. Considerem una *dissecció* del pla determinada per $n \geq 1$ rectes en posició general, cosa que significa que no n'hi ha dues de paral·leles ni tres que passin per un mateix punt; es tracta de calcular el nombre de vèrtexs, interseccions de rectes, que es produeixen. No pot ser més fàcil: atesa la condició de no haverni dues de paral·leles, dues rectes qualsevol determinen un d'aquests vèrtexs i, per l'altra condició, cada vèrtex és intersecció d'exactament dues rectes; per tant, els vèrtexs són exactament les interseccions de totes les parelles de rectes que es poden formar i, en conseqüència, el nombre de vèrtexs buscat és simplement el nombre de maneres de formar parelles de rectes, és a dir, $\binom{n}{2}$.

2.4 Resolució de recurrències

Una successió recurrent a_n és una successió de la qual coneixem explícitament alguns dels primers termes i una relació que ens permet d'obtenir el terme general en funció dels anteriors,

$$a_n = f(a_1, \cdots, a_{n-1}).$$

Per exemple, en seria una la següent:

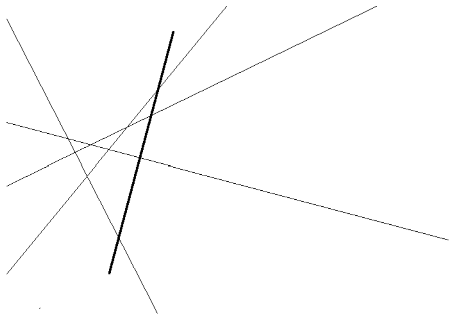
$$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}},$$

que és una possible descripció de la successió els primers termes de la qual serien

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \cdots$$

Aquests tipus de successions apareixen molt sovint en còmputs del nombre d'elements en configuracions geomètriques (nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs) i també en processos de demostració inductiva; el que interessa és obtenir el terme general a_n expressat en forma tancada en funció de n; per exemple, si tenim $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$, aleshores $a_n = a_{n-1} + 1 = (a_{n-2} + 1) + 1 = \cdots = a_1 + 1 + \overset{n-1}{\smile}{\cdots} + 1 = 1 + \overset{n}{\smile}{\cdots} + 1 = n$, tot i que no sempre és tan fàcil com en aquest exemple, realment trivial.

De vegades hom pot experimentar i induir quina és l'expressió del terme general en forma tancada, i aleshores es pot intentar de provar-la per inducció; de fet, hi ha mètodes sistemàtics de resoldre el problema, però no els veurem en aquesta secció. En els exemples geomètrics i en els problemes, només necessitarem aplicar les fórmules de sumació tancada abans esmentades a l'apartat d'identitats aritmètiques per a la resolució de les recurrències que es puguin presentar .



Exemple geomètric de recurrències. Sigui novament una dissecció del pla per $n \geq 2$ rectes en posició general, és a dir se suposa que no hi ha dues rectes paral·leles ni n'hi ha tres que passin per un mateix punt, i es tracta de calcular el nombre d'arestes a_n de la dissecció (segments de recta i semirectes); considerem una dissecció de n rectes a l'esquema adjunt i considerem una nova $(n+1)$-èsima recta, indicada amb gruix més gran.

Vegem quin és l'increment d'arestes degut a l'aparició d'una $(n+1)$-èsima nova recta. La recta $(n+1)$-èsima talla les n rectes per la condició de no paral·lelisme i produeix globalment n interseccions noves, ja que no pot tallar per la segona condició en un punt d'intersecció, ja preexistent, de dues rectes; la nova recta intercepta, doncs, n rectes que produeixen $n+1$ *noves arestes* sobre aquesta recta, travessa n arestes de les rectes que intercepta, una per cada recta, i les descompon en dues, amb la qual cosa l'increment net en el nombre d'arestes creades en aquesta operació és de n; globalment, doncs, l'increment d'arestes és de $(n+1)+n = 2n+1$ i, per tant, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$; així, doncs, la successió recurrent a estudiar és

$$a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k + 1, k \geq 1.$$

Així podem escriure:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) + 1, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2) + 1, \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 2 \cdot 2 + 1, \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1 + 1. \end{aligned}$$

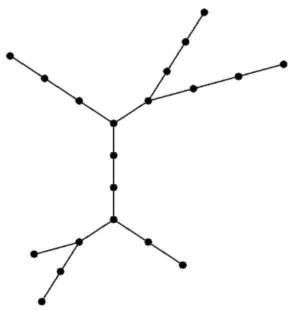
Sumant membre a membre, i utilitzant una identitat aritmètica vista anteriorment, s'obté $a_n = a_1 + 2((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) + (1 + \overbrace{\cdots}^{n-1} + 1) = a_1 + 2(\sum_{k=1}^{n-1} k) + (n-1) = a_1 + 2\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2$.

Observeu que és absolutament sorprenent que aquest resultat (com molts altres de tipus similar) només depengui del nombre de rectes, però no de quines són, és a dir, de com estan situades.

3. La fórmula d'Euler per a disseccions planes

Una relació especialment fructífera per als nostres propòsits de comptar és l'anomenada fórmula d'Euler per a grafs planars poligonals, estructura combinatòria a la quals es poden assimilar certes configuracions geomètriques per tal d'obtenir-ne informació.

3.1 Grafs planars poligonals



Un graf és una estructura combinatòria que ens permet de representar i estudiar situacions en les quals hi ha una col·lecció d'objectes, que es representen per punts del pla o **vèrtexs**, entre els quals pot haver-hi determinades relacions, que es representen per un enllaç gràfic (segment o arc) o **aresta**; podeu veure adjunt un esquema d'aquestes característiques. En termes formals un **graf** G és un parell ordenat $G = (V, A)$, on V és el conjunt de vèrtexs i A és el conjunt d'arestes, és a dir, de parelles de vèrtexs. Segueixen uns quants exemples de grafs a la figura 5.

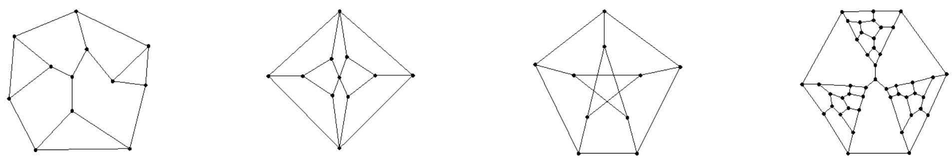
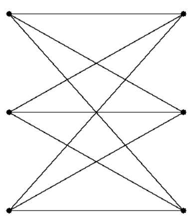


Figura 5

Un concepte interessant és el de *grau* d'un vèrtex, que és el nombre d'arestes que hi són incidents. Suposarem que els grafs amb els quals tractarem són tots d'"una sola peça" (tècnicament, connexos), és a dir que no hi ha cap desconnexió i tots els vèrtexs són connectables amb tots els altres a través d'algun camí.



Com hem dit, un graf és una estructura combinatòria que pot tenir sentit sense necessitat de cap representació gràfica; ara bé, podem intentar de representar-la en el pla de manera que les arestes no es tallin (considerem que les arestes que són incidents a un vèrtex no s'hi tallen); no sempre és possible, com es pot veure (i provar) en el cas de graf adjunt, anomenat $K_{3,3}$, que és el clàssic graf dels "veïns enemistats i els tres subministraments"; per més manipulacions gràfiques que es facin en el moment de la representació del graf és impossible d'evitar que al menys dues arestes es tallin.

Un graf és **planar** si n'existeix alguna representació en el pla en la qual no hi hagi arestes que es tallin, i en aquest cas tenim una representació planar del graf; a la figura 6 en tenim un exemple; apart dels vèrtexs i arestes, podem parlar de *cares* de la representació planar, entre les qual s'inclou l'única no fitada, que indiquem per C_∞.

Suposarem que les cares (C_∞ inclosa) són *polígons* (de com a mínim tres costats), sense arestes ni estructures arbòries que hi pengin; aquests són els **grafs planars poligonals**. No

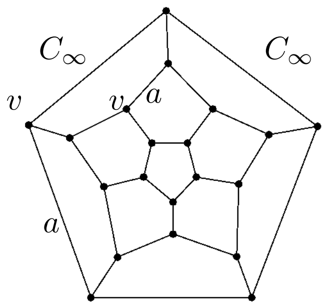


Figura 6. *Observeu com la frontera de la cara no fitada C_∞ és també un polígon, concretament un pentàgon.*

cal que les arestes siguin segments de recta: poden ser arcs de corba. Algunes disseccions geomètriques en el pla, com per exemple les determinades per n circumferències o per n rectangles són un cas particular de graf planar poligonal.

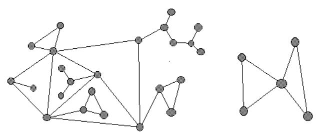


Figura 7. *Exemples de grafs planars* **no** *poligonals; en el graf de la dreta la frontera de la cara C_∞ no és poligonal.*

3.2 Fórmula d'Euler

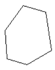
En el context dels grafs planars poligonals connexos és vàlida l'anomenada **fórmula d'Euler**, que relaciona el nombre v de vèrtexs, el nombre a d'arestes i el nombre c de cares (c inclou la cara C_∞) d'un graf del tipus anterior; concretament podem enunciar el resultat següent:

Teorema (fórmula d'Euler). *Sigui $G = (V, A)$ un graf planar poligonal connex, v el nombre de vèrtexs, a el nombre d'arestes i c el nombre de cares (comptant-hi la cara C_∞ no fitada). Aleshores es compleix:*

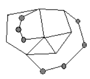
$$c + v = a + 2.$$

La demostració de la fórmula d'Euler en aquesta situació simplificada és molt senzilla i ens servirà com a un exercici addicional en el mètode d'inducció, en una situació lleugerament diferent respecte de l'exemple de la demostració per inducció de les identitats aritmètiques; es recomana al lector que s'ajudi dels esquemes corresponents.

Demostració de la fórmula d'Euler. Sigui $G = (V, A)$ un graf planar poligonal connex; considerem-ne una representació planar. Suposem el nostre graf amb v vèrtexs, a arestes i c cares. Farem la demostració per inducció sobre el nombre de cares c.

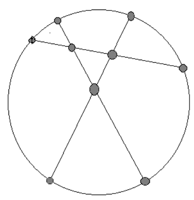


Pas 1. Suposem que $c = 2$, nombre mínim possible per a un graf planar poligonal; aleshores el graf està format per un polígon, les cares són C i C_∞ i resulta ser $a = v$, $c = 2$, amb la qual cosa trivialment es comprova que es compleix la relació.



Pas 2. Sigui $c \geq 3$ i suposem per hipòtesi d'inducció que la fórmula d'Euler es compleix per a tot graf planar poligonal de c' cares, amb $c' < c$; es tracta de manipular el nostre graf per tal de passar a aquesta situació en la qual podem afirmar la validesa de la fórmula i deduir-ne conseqüències per al nostre graf. Considerem dues cares adjacents, és a dir que comparteixen arestes; concretament comparteixen una cadena de r arestes amb els corresponents $r - 1$ vèrtexs; essent $c \geq 3$, si eliminem aquesta cadena, les dues cares es fonen en una i globalment en perdem una. Això és justament el que farem: considerem la cadena de les r arestes comunes a dues cares veïnes de G i eliminem-la; el graf resultant G' segueix essent planar poligonal i es compleix: $v' = v - (r - 1) = v - r + 1$, $a' = a - r$, $c' = c - 1$; atès que $c' < c$ podem aplicar la hipòtesi d'inducció a G' i afirmar, per tant, $c' + v' = a' + 2$. Finalment, substituïnt a l'última fórmula s'obté $(c - 1) + (v - r + 1) = (a - r) + 2$, d'on $c + v = a + 2$, com s'havia de veure.

Moltes disseccions planes són de fet grafs planars poligonals i els serà, per tant, aplicable la fórmula d'Euler; vegem-ne un exemple a continuació.

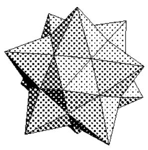


Exemple d'aplicació de la fórmula d'Euler. Es considera la figura adjunta formada per un cercle sobre el qual tracem n segments, amb els extrems situats sobre la circumferència corresponent, que poden o no intersecar-se, de tal manera que no comparteixen extrems sobre la circumferència, és a dir, que cada extrem ho és només d'un segment; suposem que es produeixen p interseccions dels segments a l'interior del cercle i que cada intersecció ho és d'exactament 2 segments diferents (és a dir, que no hi ha 3 segments que passin pel mateix punt). Es tracta de calcular el nombre de regions internes que es formen.

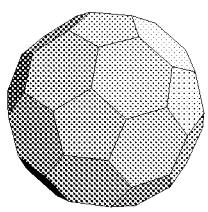
Solució. Calculem el nombre de vèrtexs v: hi ha p vèrtexs interiors a la circumferència, i $2n$ sobre la circumferència; per tant, $v = 2n + p$. Pel que fa al nombre d'arestes a raonem de la manera següent: p vèrtexs interiors aporten 4 arestes cadascun i els $2n$ vèrtexs perifèrics n'aporten 3 cadascun; ara bé, comptant d'acord amb aquesta idea comptem duplicadament totes les arestes, ja que cada aresta hi és comptada per cada un dels seus dos extrems, que són vèrtexs; per tant, $4p + 3(2n) = 2a$, d'on resulta $a = 3n + 2p$. Ara aplicarem la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$ i, per tant, $c = (3n + 2p) + 2 - (2n + p) = n + p + 2$. Finalment, el nombre de cares interiors c_i serà $c_i = c - 1 = n + p + 1$. Observem que també es pot calcular immediatament el nombre d'arestes interiors, ja que de perifèriques n'hi ha $2n$ i, en conseqüència, d'interiors n'hi haurà $a_i = a - 2n = n + 2p$. Reviseu on hem fet servir les hipòtesis sobre la configuració.

4. Políedres i fórmula d'Euler

4.1 Políedres regulars i altres políedres



Un *políedre* és un objecte geomètric limitat per cares planes poligonals que és deformable ("homeomorf") a esfera; en determinades ocasions quan parlem de políedres ens referirem només a aquesta superfície limitant, que serà una superfície polièdrica tancada. Un convex és un objecte que conté tots els segments determinats per parelles de punts del mateix objecte; existeixen molts de políedres que no són convexos, com per exemple els *estrellats*, com el que podem veure a la figura adjunta: el políedres estrellats es construeixen col-locant piràmides adequades sobre les cares d'un altre políedre convex. A la figura adjunta veiem un exemple de políedre estrellat, que és no convex.



Són ben coneguts els políedres clàssics, els *políedres regulars*, és a dir el tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosàedre; a la figura 8 els podem veure i en aquest paràgraf es pot observar un altre políedre (anomenat icosàedre truncat) que no és un políedre regular, tot i compleix també determinades condicions de regularitat: l'estructura d'aquest últim políedre és la que dóna forma a la "pilota de futbol". En aquestes figures observem ben clarament elements geomètrics tals com els *vèrtexs*, les *arestes* i les *cares*. Aquest elements defineixen una estructura de connectivitat que depassa les relacions mètriques en les figures (és a dir, les interdistàncies entre els punts dels objectes) i que es manté si es realitzen determinades transformacions, com certes deformacions que no impliquin ni talls ni trencaments de l'estructura.

Direm que un políedre és "regular" si tots els vèrtexs són incidents al mateix nombre d'arestes i totes les cares són polígons del mateix tipus; aquest és un concepte topològic de políedre regular, on només interessa la forma de les cares i les connectivitats entre vèrtexs i, per tant, s'admet deformació. Si a més s'exigeix que les cares siguin polígons regulars del mateix tipus, aleshores estem fent intervenir aspectes mètrics i obtenim els políedres regulars en sentit clàssic, dels quals es pot demostrar que n'existeixen cinc i no més.

Figura 8. *Els cinc políedres regulars*

4.2 Políedres i disseccions geomètriques

Perquè parlar de políedres en un tema de disseccions geomètriques? A primera vista no és molta la relació entre políedres i disseccions geomètriques en el pla, però això només és aparent, ja que mitjançant la projecció adequada (tècnicament, una projecció possible és la *projecció estereogràfica*) podem traslladar l'estructura de connectivitat del políedre (vèrtexs, arestes i cares) al pla, formant així una dissecció plana i traslladant a propietats del políedres algunes propietats que es puguin obtenir a la dissecció; a la figura 9 podem veure un esquema relatiu al que s'ha esmentat.

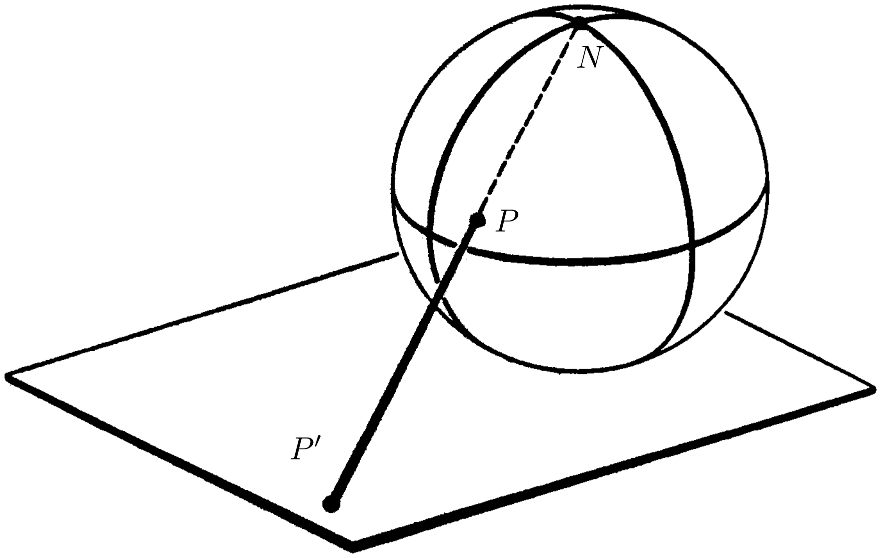


Figura 9. *Projecció estereogràfica. El pla de projecció és tangent a la superfície esfèrica per un punt que podem considerar "pol sud"; el centre de projecció és el punt diametralment oposat o "pol nord" N i la projecció de qualsevol punt $P \neq N$ de l'esfera és la intersecció del pla amb la recta NP.*

A les figures 10,11,12,13 i 14 es veuen projeccions planars o esquemes planars dels políedres regulars; aquestes projeccions poden obtenir-se per projecció estereogràfica, prèvia projecció del políedre sobre l'esfera (deixem molts de detalls tècnics sense precisar), projecció estereogràfica de pol de projecció situat a l'interior del que correspondria a una cara del políedre (el contorn o frontera d'aquesta cara és la que dóna lloc a la frontera de l'única cara no fitada de la representació planar corresponent). La projecció estereogràfica és l'eina tècnica rigurosa per fer aquesta operació d'obtenir grafs planars combinatòriament equivalents als políedres, és a dir, amb els mateixos vèrtexs, cares i estructura de connectivitat, oblidant els aspectes mètrics, però de fet es poden obtenir en els casos més senzills aquests esquemes equivalents de forma intuïtiva; el lector es pot entretenir en dibuixar projeccions planars d'altres políedres, com per exemple del cub escapçat o en d'altres políedres més complexos.

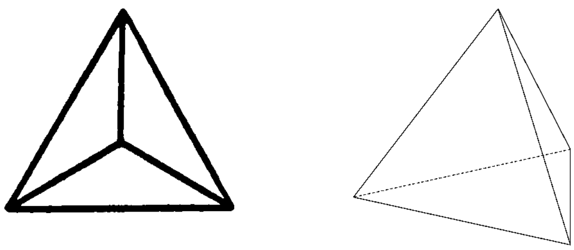


Figura 10.

El tetràedre

4.3 Fórmula d'Euler per a políedres

Una primera conseqüència és la validesa de la fórmula d'Euler per a políedres (suposem-los convexos, per simplificar, però aquesta restricció no és estrictament necessària), és a dir que es compleix:

$$C + V = A + 2,$$

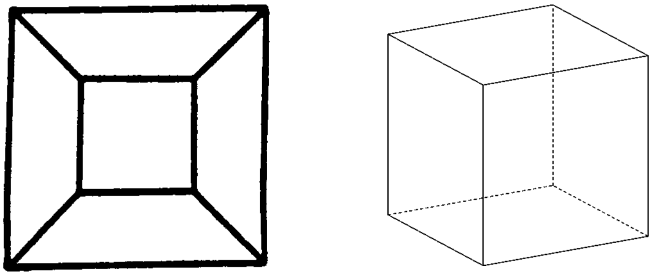


Figura 11.

El cub

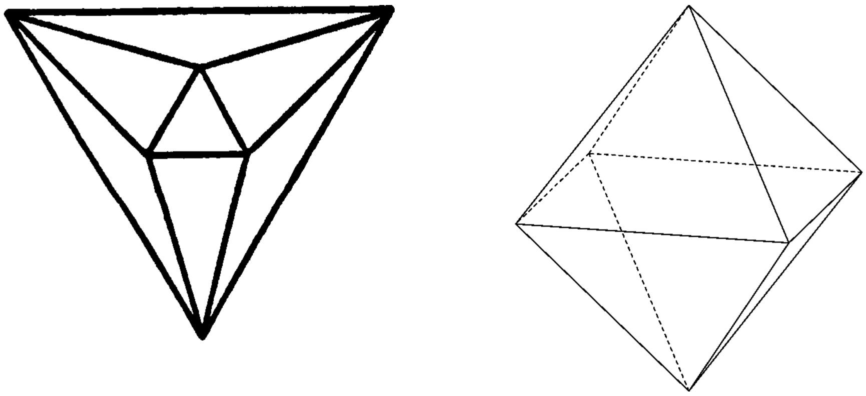


Figura 12.

L'octàedre

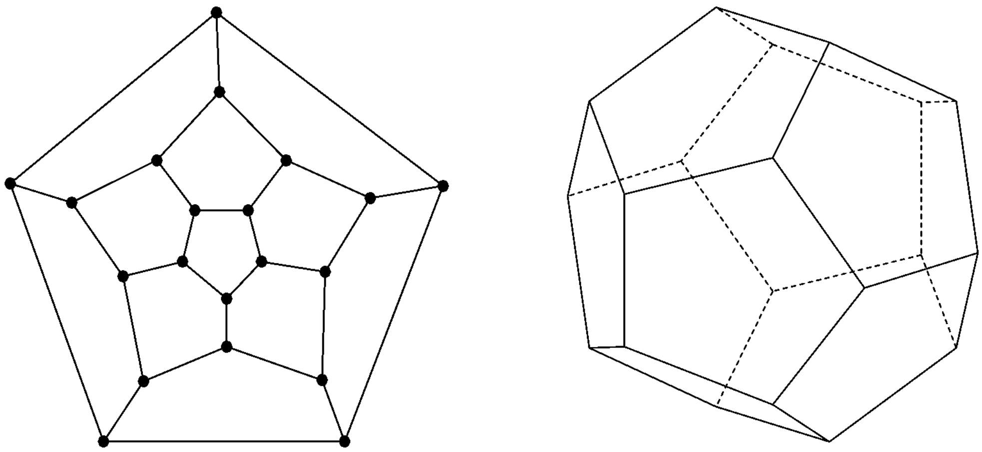


Figura 13.

El dodecàedre

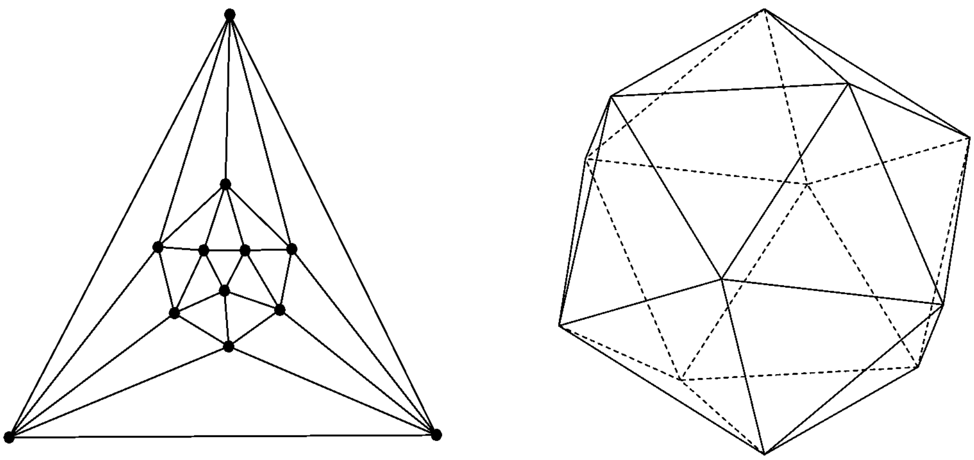


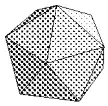
Figura 14.

L'icosàedre

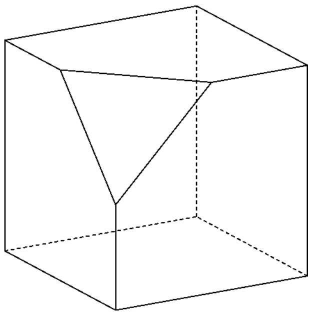
on C el nombre de cares, V el nombre de vèrtexs i A el nombre d'arestes.

4.4 Exemples d'aplicació

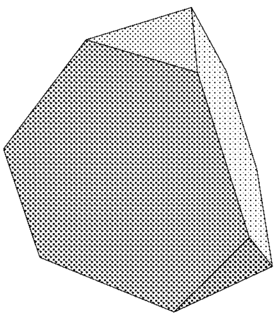
Vegem tres situacions de dificultat progressiva en els quals s'utilitza la fórmula d'Euler per a políedres:



Exemple 1. Si ens diuen que l'icosàedre té 12 vèrtexs i 20 cares, el nombre d'arestes no pot ser altre que $a = c + v - 2 = 30$, i això també és vàlid per a qualsevol deformació "topològica" de la figura.



Exemple 2. Considerem un políedre convex de 10 vèrtexs tal que cada vèrtex és incident amb 3 arestes. Calculeu el nombre de cares i d'arestes. En efecte, considerem un graf planar poligonal associat, per al qual $v = 10$; comptem el nombre d'arestes a partir de les que "aporta" cada vèrtex, que és precisament 3; ara bé, aquesta manera de comptar ens dóna el doble del nombre d'arestes, de manera que poden escriure $3v = 2a$, d'on $a = 15$. Ara apliquem las fórmula d'Euler per obtenir $c = a + 2 - v = 7$. Observeu que el cub escapçat de la figura demostra que n'existeixen de políedres amb aquestes característiques; construïu diversos grafs planars poligonals associats al políedre.

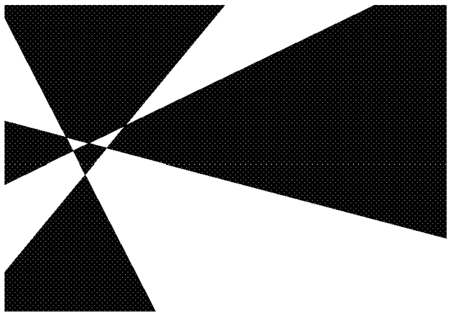


Exemple 3. Considerem un políedre format per cares triangulars i hexagonals, de manera que cada vèrtex és incident amb 3 arestes . Demostreu que té exactament 4 cares triangulars. Obteniu també el nombre de vèrtexs i arestes en funció de les cares hexagonals. Observeu que existeixen políedres que s'ajusten a aquestes característiques, com el de la figura adjunta, que és un tetràedre truncat, obtingut per escapçat o truncament del tetràedre regular.

Solució. Siguin n_3 el nombre de cares triangulars i n_6 el nombre de cares hexagonals; òbviament és $c = n_3 + n_6$. Comptem el nombre d'arestes a partir de les que aporta cada vèrtex: cada vèrtex contribueix amb 3 al còmput global d'arestes, però com que cada aresta hi és comptada dues vegades, resulta la relació $3v = 2a$; comptem-les ara a partir de les que aporta cada cara: les cares triangulars n'aporten 3, i les hexagonals, 6, però això significa comptar-les duplicadament, ja que totes les cares són polígons i, en conseqüència, tota aresta pertany a la frontera comuna d'exactament 2 cares; per tant, podem escriure $3n_3 + 6n_6 = 2a$. Finalment, utilitzant aquestes relacions i substituïnt a la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$, s'obté una relació entre n_3 i n_6, concretament $(n_3 + n_6) + (n_3 + 2n_6) = \frac{3}{2}n_3 + 3n_6 + 2$, d'on se'n deriva que $n_3 = 4$. Al mateix temps s'obté $v = 4 + 2n_6$ i $a = 6 + 3n_6$.

5. Enunciats d'exercicis

Es recomanable d'intentar resoldre els problemes pel màxim de mètodes possibles dels que hom sigui capaç.



DS1.– *Amb dos colors n'hi ha prou (1).* Considereu una descomposició o dissecció del pla per n rectes en regions poligonals. Es considera que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirrecta o un segment de longitud no nul·la. Formuleu una altra variant de demostració inductiva del resultat que afirma que una dissecció en el pla és 2-acolorible segons la idea següent: elimineu una recta de la dissecció de n rectes: d'aquesta operació en resulta una dissecció de $n' = n - 1 < n$ rectes que és 2-acolorible per hipòtesi d'inducció; continueu amb arguments similars als de la demostració donada.

DS2.– *Amb dos colors n'hi ha prou (2).* Es tenen n circumferències en el pla. Proveu que amb 2 colors n'hi ha prou per acolorir el mapa que determinen. Estudieu si és cert un resultat anàleg per a la dissecció determinada per n rectangles com els de la figura 15.

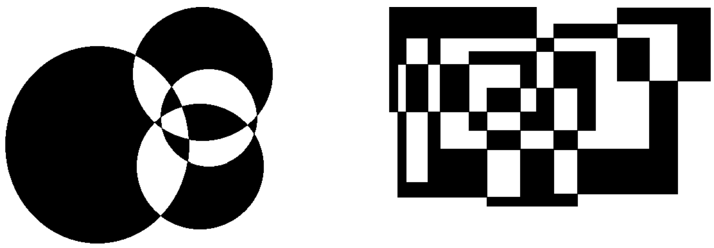


Figura 15

DS3.– *Disseccions per rectes.* Considereu una dissecció del pla per $n \geq 1$ rectes en posició general, cosa que significa que no n'hi ha dues de paral·leles ni tres que es tallin en un punt. La dissecció produeix un nombre v_n de vèrtexs, un nombre a_n d'arestes (segments de longitud no nul·la o semirectes) i un nombre c_n de regions poligonals o cares.

a) Proveu que $v_n = \binom{n}{2}$, $a_n = n^2$ i $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$.

b) Calculeu el nombre de cares o regions no fitades. Quin és el nombre de cares fitades?

DS4.– *Disseccions per plans.* Calculeu en quantes regions polièdriques divideixen l'espai n plans en posició general (és a dir, tres qualssevol es tallen i no n'hi ha quatre que tinguin un punt comú).

DS5.– *Disseccions per circumferències.* Considereu n circumferències en el pla en posició tal que es tallen dos a dos i no n'hi ha tres que es tallin en un mateix punt. Calculeu el nombre d'interseccions, d'arcs de circumferència i regions planes (limitades pels arcs) que es produeixen.

DS6.– *Disseccions per esferes.*

a) Calculeu en quantes regions divideixen l'esfera n circumferències sobre l'esfera que es tallen dues a dues.

b) En quantes parts divideixen l'espai n esferes si dues qualssevol es tallen.

DS7.– *Mapes.* Proveu que si a cada vèrtex d'un mapa convergeix un mínim de 3 fronteres, aleshores hi ha un país que com a molt té cinc fronteres.

DS8.– Sigui P un polígon convex de n costats tal que no hi ha tres diagonals que es tallin en un punt.

a) Calculeu el nombre de diagonals.

b) Calculeu el nombre d'interseccions interiors de les diagonals.

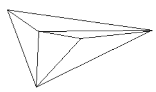
c) Calculeu el nombre d'arestes produïdes per les diagonals amb les seves interseccions mútues.

d) Calculeu el nombre de regions poligonals interiors produïdes per les diagonals.

DS9.– Sigui P un políedre convex amb 12 vèrtexs i 30 arestes. Proveu que totes les cares són triangulars.

DS10.– Considereu un políedre convex format per cares triangulars i quadrangulars tal que cada vèrtex pertany a exactament 4 cares. Proveu que conté exactament 8 triangles.

DS11.– Considereu un políedre convex de 10 cares tal que tot vèrtex és incident amb 4 arestes exactament. Calculeu el nombre de vèrtexs i d'arestes.



DS12.– Considereu un políedre de n vèrtexs format per cares triangulars (n'existeixen, ja que per exemple l'icosàedre n'és un, entre d'altres possibles). Proveu qeu el nombre d'arestes és $a = 3n - 6$ i que el nombre de cares és $c = 2n - 4$.

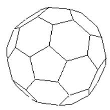
DS13.– Proveu que en un políedre de cares quadrangulars es compleix $a = 2v - 4$ i $c = v - 2$.

DS14.– Proveu que per a un políedre de cares pentagonals es compleix $c = \frac{2}{3}(v - 2)$ i $a = \frac{5}{3}(v - 2)$.

DS15.– Demostreu que si un políedre té totes les cares formades per un mateix tipus de polígon, aleshores només poden ser o triangles o quadrilàters o pentàgons.

DS16.– Considerem una dissecció planar poligonal del pla formada per quadrilàters excepte possiblement la cara no fitada. Demostreu que el nombre de vèrtexs de la cara no fitada és parell. Vegeu la versió en termes de políedres: si existeix un políedre anb totes les cares quadrangulars excepte possiblement una, proveu que aquesta hauria de tenir un nombre parell de costats.

DS17.– Demostreu que no existeixen políedres convexos tal que tots els vèrtexs siguin incidents amb sis o més arestes.



DS18.– *Fullerens o pilota de futbol.* Els fullerens són compostos químics de recent descobriment; constitueixen la tercera estructura a l'espai segons la qual es pot trobar el carboni; els àtoms de carboni ocupen els vèrtexs d'un políedre format per cares pentagonals o hexagonals i els enllaços dobles o simples constitueixen les arestes de l'estructura polièdrica, de manera que cada carboni s'enllaça exactament amb tres carbonis veïns. És la mateixa estructura, en un cas concret, que la de la pilota de futbol. Considereu un políedre convex tal que per a tot vèrtex hi ha exactament 3 arestes incidents i les cares són pentagonals o hexagonals. Proveu que ha de tenir exactament 12 cares pentagonals.

DS19.– *Buckminsterfullerè.* El buckminsterfullerè és un compost químic format per 60 àtoms de carboni enllaçats entre sí formant una estructura polièdrica convexa. Cada àtom està enllaçat a exactament 3 àtoms, i sabem que les cares són hexàgons o pentàgons.

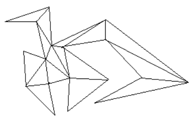
a) Calculeu el nombre d'hexàgons.

b) Calculeu el nombre de pentàgons.

c) Calculeu el nombre d'arestes.

DS20.– Demostreu que no existeix cap políedre format per cares hexagonals, pentagonals i amb tots els vèrtexs de grau 4, és a dir, incidents amb 4 arestes.

DS21.– Si un políedre és de cares pentagonals i tots els vèrtexs són incidents amb un mateix nombre g d'arestes, proveu que $g = 3$.



DS22.– *Triangulacions.* Considerem polígons de $n \geq 3$ vèrtexs (no necessàriament convex) sense forats; una *diagonal interna* d'un polígon és un segment determinat per dos vèrtexs no consecutius, contingut al polígon. Una *triangulació* d'un polígon és una descomposició en reunió de triangles produïts afegint diagonals internes, de tal manera que els solapaments entre triangles siguin d'àrea nul·la. La descomposició no és única, com es pot veure fàcilment. Demostreu:

a) Un polígon sempre és triangulable. *Indicació:* demostreu l'existència d'alguna diagonal interna, utilitzeu-la per descompondre el polígon en dos polígons de nombres inferiors de costats respectivament i acabeu la demostració per inducció.

b) Si tenim una triangulació d'un polígon mitjançant t triangles produïts afegint m diagonals internes, calculeu t i m en funció de n, demostrant així que són independents de la particular triangulació, i només depenen del nombre de vèrtexs. El resultat a provar és: $t = n - 2$, $m = n - 3$.

c) Demostreu com a conseqüència dels apartats anteriors que la suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és $\pi(n-2)$. Quina és la suma dels exteriors?.

d) Un vèrtex d'un polígon es diu *convex* si l'angle interior corresponent és menor estricte que π. Proveu que tot polígon té un mínim de 3 vèrtexs convexos.

DS23.– *Enunciat de la XXX Olimpíada Matemàtica, 26 de Febrer 1994 (generalitzat).* Un polígon de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'alguns altre triangle contigu o del polígon donat.

a) Demostreu que $m + n$ és parell.

b) Coneguts n, m, trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden a aquest interior.

Indicació: podeu resoldre'l directament, utilitzant la fórmula d'Euler, o bé indirectament utilitzant els resultats del problema de triangulació. En el cas convex la resolució és més simple.

EQUACIONS FUNCIONALS

Claudi Alsina i Català

El gran motor de les matemàtiques és la resolució de problemes, activitat en la qual es combinen enginy i coneixement, mètode científic i aventura intel·lectual. En aquest petit article us voldríem aproximar a la resolució d'unes equacions molt especials dites equacions funcionals.

La teoria d'equacions funcionals ha nascut aquest segle de la mà d'un gran matemàtic hongarès: el professor Janos Aczél. Els precedents històrics són moltes contribucions disperses de J. D'Alembert, L. Euler, L.A. Cauchy, A.M. Legendre, C.F. Gauss, etc., que a partir del naixement del concepte de funció estudiaren algunes equacions on les incògnites eren funcions. Avui hi ha uns 200 matemàtics al món dedicats a resoldre aquestes equacions les quals neixen o de la pròpia matemàtica o de molts camps d'aplicació com són l'economia, la computació, la física, l'estadística, etc.

Aquí farem una presentació senzilla d'equacions funcionals per tal que si teniu ocasió de participar en olimpíades matemàtiques, on sovint hi ha problemes amb aquestes equacions, sapigueu com atacar-los. Resoldre aquestes equacions és una activitat matemàtica apassionant a la que tots i totes hi esteu convidats ara i sempre.

Però... què és una equació funcional?

Amb llenguatge senzill podem dir que una *equació funcional* és una igualtat on l'incògnita és una funció (o diverses).

Observeu les següents igualtats:

(1) $2+2=4$ (2) $8x^2+x-1=0$ (3) $f(x \cdot y) = f(x) + y$

El cas (1) és una identitat aritmètica, el cas (2) és una equació algebraica de segon grau on l'incògnita x podrà ser aïllada mitjançant un procés que ens portarà als possibles valors numèrics solució. El cas (3) és una equació funcional: desitgem saber quines funcions f poden satisfer la relació donada en (3).

Les següents expressions són equacions funcionals:

(4) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(5) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

(6) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

(7) $f(x^2) = 2f(x)$

(8) $f(f(x)) = x$

(9) $f(x^2) + f(x) = \sin x$

En els casos (4), (5) i (6) trobem *equacions funcionals amb diverses variables* (x, y) mentre que en (7), (8) i (9) veiem *equacions funcionals en una sola variable* (x). En tots aquests casos la funció incògnita f és d'una variable. També hi ha equacions amb diverses funcions incògnites i amb funcions de diverses variables.

L'equació més emblemàtica

Per la seva llarga història, i per la seva constant presència en la resolució de moltes altres equacions, destaca amb llum pròpia l'equació funcional de Cauchy:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Fent $x = y = 0$ resulta $f(0) = 0$ i aleshores fent $y = -x$ resulta $f(-x) = -f(x)$. En els nombres naturals hom obté:

$$f(n) = f(1 + \overset{\overset{n}{\smile}}{\cdots} + 1) = f(1) + \overset{\overset{n}{\smile}}{\cdots} + f(1) = f(1) \cdot n.$$

En els nombres enters, vist que $f(+n) = f(1) \cdot (+n)$ en els positius, $f(0) = 0$ i $f(-n) = f((-1)n) = -f(n) = f(1)(-n)$ també resulta que $f(x) = f(1) \cdot x$. En els nombres racionals m/n amb $m, n > 0$ serà

$$f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + \overset{\overset{n}{\smile}}{\cdots} + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n,$$

o sigui $f(1/n) = f(1)/n$ i per tant

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \overset{\overset{n}{\smile}}{\cdots} + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot m = f(1)\frac{m}{n}$$

i d'aquí $f(x) = f(1) \cdot x$.

En els nombres reals poden existir infinites solucions de l'equació de Cauchy diferents de $f(x) = f(1) \cdot x$ si hom no suposa cap condició especial a f. Però si es suposa que f és contínua en la recta real o f és contínua en un punt o f és creixent o decreixent, o f es positiva en un interval, etc. aleshores $f(x) = f(1) \cdot x$ és l'única solució. La idea bàsica és que si $f(x) = f(1)x$ en els racionals i suposem continuïtat, com que qualsevol real es pot aproximar per racionals aleshores passant al límit també serà $f(x) = f(1)x$ per a qualsevol real x.

Equacions relacionades amb la de Cauchy i molt bàsiques són les següents:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

que té com a solucions contínues $f(x) \equiv 0$ i $f(x) = e^{cx}$. Si considerem l'equació

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

vàlida per tot $x, y > 0$ i f és contínua aleshores $f(x) = c \ln |x|$. Si

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

les solucions contínues són $f(x) = |x|^c$ ($| \quad |$ indica valor absolut), $f(x) = 0$ i $f(x) = |x|^c \cdot \operatorname{signe}(x)$. Si mirem l'equació de Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

les solucions contínues són rectes $f(x) = ax + b$. En el cas de l'equació de D'Alembert

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$$

trobem les solucions contínues $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos bx$, $f(x) = \cosh bx$ (cosinus hiperbòlic). Cal notar com apareixen solucions amb constants arbitràries però que hi ha casos en que les solucions poden dependre de funcions arbitràries. Això passa molt amb les equacions d'una sola variable. D'una equació o condició tal com $f(-x) = f(x)$ el màxim que podríem dir es que la seva solució és

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \leq 0, \\ g(-x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

on g és una funció arbitrària definida en els reals no positius.

Que és el primer que cal mirar en una equació funcional?

Hi ha diverses informacions, explícites o implícites, que són importants d'observar en considerar una equació funcional:

(a) *Quin és el domini?*
Pot tractar-se de funcions definides en nombres naturals, enters, racionals, reals, complexos... o en un subconjunt d'aquests o en vectors, o matrius o d'altres funcions... Quins elements distingits hi ha en el domini i quina estructura hi coneixem? Això ajudarà a fer substitucions o a operar.

(b) *Quin és el conjunt de valors?*
Pot tractar-se de funcions que pren valors en el mateix domini o en un altre conjunt... i això pot delimitar les solucions possibles.

(c) *Quines funcions o operacions conegudes hi ha?*
Ben segur que a l'equació hi ha moltes vegades, junt a la funció incògnita, algunes funcions conegudes que ens seran d'ajut en fer càlculs.

(d) *Quines condicions satisfà la funció incògnita?*
A més de l'equació podem tenir condicions addicionals com continuïtat, creixement, positivitat,... etc. Aquestes condicions ens han de permetre fer determinades operacions i a la vegada ens delimitaran les solucions que cerquem.

Problema. Determineu les funcions $f(x)$ definides en els enters i que prenen valors reals positius que són estrictament creixents i satisfan l'equació

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y.$$

Aquí tant x com y són enters; $f(x+y)$ i $f(x)$ són reals positius; en l'equació apareixen les funcions conegudes $x+y$ (suma), $a \cdot b$ (producte) i e^y (exponencial). Volem f estrictament creixent.
Per exmple, fent la substitució $x = 0$ tindrem

$$f(y) = f(0+y) = f(0) \cdot e^y$$

que determina totalment $f(y)$, llevat d'una constant arbitrària $f(0)$ que haurà de ser positiva. Noteu que si feu la substitució $y = 0$ no sortiria res ($f(x) = f(x)$) i que si no s'hagués dit res sobre el creixement estricte de f hauria pogut sortir la solució $f(y) \equiv 0$ (amb $f(0) = 0$) o $f(y) = f(0) \cdot e^y$ amb $f(0)$ qualsevol valor. Si s'haguès dit que f prenia valors enters i res sobre creixement hauria sortit $f(y) = f(0)e^y$ la qual cosa donaria valors enters sols en el cas $f(0) = 0$.

Set bons consells que podeu fer vostres

Avui es coneixen bastants mètodes per a resoldre equacions funcionals. Alguns són senzills i ràpids. D'altres són sofisticats i lents. Però triar un bon mètode és, i serà sempre, un art. Cada equació és un repte que exigeix fer-hi feina i posar-hi imaginació. L'ofici matemàtic ens porta no sols a resoldre aquestes equacions sinó també a fer-ho de la manera més simple possible, la més elegant. Per ajudar-vos a resoldre equacions senzilles us oferim set consells que podeu tenir en compte.

I. Una mateixa equació pot tenir solucions diferents en dominis diferents o en rangs diferents o en classes de funcions diferents.

En efecte, considerem l'equació

$$(*) \qquad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Si suposem que el nombre zero pertany al domini de la funció podem fer $x = y = 0$ en (*) i surt $f(0) = f(0) + f(0)$ o sigui $f(0) = 0$ i fent ara la substitució $y = 0$ en (*) on deixarem la variable x arbitrària tindrem $f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)$, és a dir, $f(x) \equiv 0$. Així sols la funció zero és solució de (*) quan el nombre 0 és del domini de f. En canvi si el zero no pertany al domini l'equació (*) pot tenir altres solucions com $f(x) = \log|x|$. Seguint explotant (*) podem notar que si l'imatge de f estés situada en els nombres reals positius aleshores $\log|x|$ no seria solució i si volguéssim veure solucions f de (*) estrictament creixents de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, en ser $f(y) > 0$ i tenir $f(x) < f(x) + f(y) = f(xy)$ aleshores per $0 < x, y < 1$ seria $xy < x$ i $f(x) < f(xy) < f(x)$ contradicció que ens diu la no existència de solucions estrictament creixents.

II. Feu substitucions de les variables per valors numèrics i intenteu treure el màxim profit *del coneixement de la funció en certs valors... jugant amb la pròpia equació i estenent les solucions d'uns dominis a d'altres més amplis.*

D'acord amb el domini de les funcions incògnites és recomanable fer substitucions de les variables per valors especialment rellevants per al domini i per a l'equació. Per exemple, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2^k$, $x = -1$,... anar mirant com es comporta la funció en punts concrets o en subconjunts interessants del domini (nombres naturals, potències de dos, nombres primers, nombres enters, nombres racionals,...).

Problema (CMO 75). Sigui f una funció dotada de les següents propietats:
(1) $f(n)$ està definida per qualsevol enter positiu n;
(2) $f(n)$ és un nombre enter;
(3) $f(2) = 2$;
(4) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ per a tots els enters positius n i m;
(5) $f(m) > f(n)$ sempre que $m > n$.
Demostreu que $f(n) = n$ per a tot enter positiu.

Solució. Combinant (3) i (4) resulta $f(2^k) = 2^k$ per tot $k = 0, 1, 2, ...$ Tenint en compte que

$$2^k < 2^k + 1 < 2^k + 2 < ... < 2^k + 2^k - 1 < 2^{k+1},$$

resultarà per als valors de f:

$$2^k = f(2^k) < f(2^k + 1) < ... < f(2^{k+1} - 1) < f(2^{k+1}) = 2^{k+1},$$

la qual cosa diu que entre 2^k i 2^{k+1} hi ha $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$ enters diferents. Per tant $f(2^k + j) = 2^k + j$, i $f(n) = n$ per a tot n.

Problema (AMO 95) Determineu totes les funcions que prenen valors reals i definides en el conjunt dels nombres reals positius tals que:
(1) $f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$ per a x, y reals positius;
(2) $f(1) = \frac{1}{2}$.

Solució: Usant (2) i (1) amb $x = y = 1$ resulta $f(3) = 1/2$ i fent $y = 1$ en (1) tindrem aleshores $f(x) = f(x)f(3) + f(1)f\left(\frac{3}{x}\right)$, és a dir, $f(3/x) = f(x)$. Aquesta descoberta ens permet reescriure (1) en la forma $f(xy) = 2f(x)f(y)$ i fent $x = y$ tindrem

$$\begin{aligned} 2f(x)^2 = f(x^2) &= f(x) \cdot f\left(\frac{3}{x}\right) + f(x)f\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= f\left(x \cdot \frac{3}{x}\right) = f(3) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

és a dir, $f(x)^2 = 1/4$ i per tant

$$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = 2f(\sqrt{x})f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = 2f(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}.$$

Problema (TELECOM 93 AMO) Per a cada funció definida en tots els reals i satisfent:
(i) $f(x \cdot y) = x \cdot f(y) + f(x) \cdot y$;
(ii) $f(x+y) = f(x^{1993}) + f(y^{1993})$; determineu el valor $f(\sqrt{5753})$.

Solució. Fent $x = y = 1$ en (i) resulta $f(1) = 0$ i fent $x = y = 0$ en (ii) surt $f(0) = 0$. Si aleshores fem $y = 0$ en (ii) serà $f(x) = f(x+0) = f(x^{1993}) + f(0) = f(x^{1993})$, és a dir, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i per tant en els naturals serà $f(n) = f(1) \cdot n = 0$. Usant ara (i) serà per a $x = y = \sqrt{5753}$, $2\sqrt{5753}f(\sqrt{5753}) = f(5753) = 0$ o sigui $f(\sqrt{5753}) = 0$.

III. Feu canvis de variables o substitucions que lliguin les variables entre sí i estudieu les equacions que resulten en aquests dominis restringits

Si en una equació amb dues variables x, y feu $y = x$ us quedarà una equació d'una sola variable per analitzar. També podeu fer proves de l'estil $y = tx$, $y = x^2$,... podeu combinar perfectament aquestes "noves" equacions amb les de partida.

Problema (AMO 91) Demostreu que hi ha exactament una funció f definida en tots els reals no nuls que satisfà
(i) $f(x) = xf(1/x)$, per tot real x no nul;
(ii) $f(x) + f(y) = 1 + f(x+y)$, per a tota parella (x, y) de reals no nuls i tals que $x \neq -y$.

Solució. Fent la substitució $x = y = t/2$ en (i) i (ii) resulta

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}f\left(\frac{2}{t}\right) \qquad \text{i} \qquad 2f\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + f(t),$$

i combinant ambdues expressions tenim

$$\frac{1+f(t)}{t} = \frac{2}{t}f\left(\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{2}{t}\right) = 2f\left(\frac{1}{t}\right) - 1 = \frac{2}{t}f(t) - 1,$$

és a dir, $f(t) = 1 + t$. És immediat verificar que $1 + t$ satisfà les condicions inicials.

IV. Observeu l'equació funcional amb detall i esbrineu si coneixeu d'entrada alguna solució. Aquesta informació pot ser molt útil per a resoldre-la.

En efecte si $f_0(x)$ és una solució particular que es veu a ull podeu, per exemple, introduir una nova funció $h(x) = f(x) - f_0(x)$ i intentar veure si l'equació satisfeta per $h(x)$ porta a $h(x) \equiv 0$. També podríem introduir $h(x) = f(x)/f_0(x)$ si f_0 mai no s'anul·lés i intentar veure si $h(x) \equiv 1$.

Problema (TELECOM 94 AMO) Determineu totes les funcions f, definides en tots els nombres racionals i amb valors reals, tals que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Solució. Mirant l'equació amb ulls atents descobrim que sabem veure almenys la solució $f(x) = x^2$ ja que $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$. Introduïm aleshores la funció $h(x) = f(x)-x^2$ i mirem quina equació satisfarà:

$$\begin{aligned} h(x + y) + (x + y)^2 = f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy \\ h(x) + x^2 + h(y) + y^2 + 2xy, \end{aligned}$$

i simplificant resulta $h(x + y) = h(x) + h(y)$. Així amb gran alegria retrobem l'equació de Cauchy i ja sabem que $h(x) = c \cdot x$ en els x racionals. Per tant, haurà de ser $f(x) = h(x) + x^2 = cx + x^2$. Però hem de comprovar si realment aquesta funció és solució per a qualsevol valor de c:

$$f(x + y) = c(x + y) + (x + y)^2 = cx + x^2 + cy + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Feina ben feta! Finalment s'ha resolt totalment el problema.

V. Intenteu introduir canvis funcionals que us permetin passar de l'equació donada a un altre ja coneguda... i torneu endarrera desfent el canvi.

Això ho fem sempre resolent problemes de matemàtiques: aprofitar problemes coneguts per a resoldre'n d'altres.

Problema. Trobeu les funcions f definides en els nombres racionals i amb valors reals positius que satisfan l'equació

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

per a qualssevol x, y reals.

Solució. Coneixent la funció logaritme neperià i aplicant-la als dos membres de l'equació (la qual cosa té sentit ja que suposem $f(x)$ estrictament positiva):

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y),$$

Així la nova funció $g(x) = \ln f(x)$ satisfà l'equació de Cauchy en els racionals i per tant serà $g(x) = g(1)x$, és a dir, $\ln f(x) = \ln f(1) \cdot x$, o sigui, $f(x) = e^{\ln f(1) \cdot x}$, essent $\ln f(1) = k$ una constant. És fàcil veure que la funció e^{kx} satisfà l'equació qualsevol que sigui k. Noteu que per $k = 0$ tenim la solució constant $f(x) \equiv 1$.

VI. Tenint en compte la pròpia equació funcional i les condicions requerides a la funció incògnita podeu deduir noves condicions de la funció... que a la seva vegada poden ajudar a resoldre l'equació.

Sovint trobareu equacions i condicions sobre les funcions incògnites tals com ser creixent, decreixent, positiva, continua, derivable, bijectiva,... aleshores mireu si l'equació us permet deduir alguna condició més.

Problema. Una funció f definida en els nombres reals i a valors reals positius satisfà l'equació $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Proveu que f es estrictament creixent.

Solució. Com que $f(z) > 0$ per a tot real z aleshores si $x < y$ serà $f(y) = f(x+(y-x)) = f(x) + f(y-x) > f(x)$ i per tant f és estrictament creixent.

Problema (AMOC 95). Sigui f una funció, definida en tots els nombres reals i prenent valors reals no nuls, tal que

$$f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$$

per a tot x. Proveu que f és periòdica, és a dir, existeix un nombre positiu P tal que $f(x+P) = f(x)$ per a tots els nombres reals x.

Solució. Caldrà manipular directament l'equació donada fins a fer aparèixer la condició de periodicitat:

$$\begin{aligned} f(x+6) &= f(x+4+2) = f(x+4-1)f(x+4+5) \\ &= f(x+3)f(x+9) = f(x+1+2)f(x+9) \\ &= f(x)\cdot f(x+6)\cdot f(x+9), \end{aligned}$$

i essent f mai nul·la, resulta $f(x+9) = 1/f(x)$ d'on $f(x+18) = f(x+9+9) = \frac{1}{f(x+9)} = f(x)$. Vet aquí que el període buscat és $P = 18$ (o un dels seus múltiples!).

VII. Cal verificar sempre si les funcions obtingudes resolent una equació funcional són realment solucions de l'equació de partida.

Com que en resoldre una equació fem substitucions, igualtats o relacions entre variables, etc., pot ser que surti una funció que essent solució d'una de les equacions intermèdies no ho sigui de l'equació inicial. I també pot succeir que en verificar si una "aparent" solució ho és realment ens veiem forçats a restringit la classe de solucions.

Problema. Trobeu les funcions f, definides en els nombres reals i a valors reals, que satisfan l'equació funcional

$$f(x^2+y) = f(x) + y^2,$$

per a tots els x, y reals.

Solució. Fent la substitució $x = 0$ resulta $f(y) = f(0) + y^2$, però en verificar si aquesta funció satisfà l'equació de partida ens trobem que hauria de ser

$$f(0) + (x^2+y)^2 = f(0) + x^2 + y^2,$$

que és impossible. Per tant l'equació donada no té solució.

Problema (CMO 68). Sigui k un enter positiu. Trobeu tots els polinomis $P(x)$ amb coeficients reals satisfent l'equació $P(P(x)) = P(x)^k$.

Solució. Sigui $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ de grau n. Si $P(x)$ ha de satisfer $P(P(x)) = P(x)^k$, haurà de ser: grau $P(P(x)) = n^2 =$ grau $P(x)^k = n\cdot k$, o sigui, $n^2 = nk$, la qual cosa porta als casos $n = 0$ o $n = k$. Si $n = 0$ serà $P(x) = a_0$ constant i en satisfer-se $a_0^k = a_0$ resultarà que si $k = 1$, a_0 es qualsevol constant però si $k \neq 1$ necessàriament $a_0 = 0$ o $a_0 = 1$. Si $n = k$ i $a_k \neq 0$, mirant els coeficients de x^{k^2} en la igualtat $P(P(x)) = P(x)^k$ resulta $a_k^{k+1} = a_k^k$ d'on $a_k = 1$. Aleshores (feu-ho!) surt també $a_{k-1} = a_{k-2} = ... = a_1 = a_0 = 0$ resultant en aquest cas $P(x) = x^k$.

Problemes.

Els següents problemes han sortit en l'Olimpíada Matemàtica Internacional (IMO) o en l'Austrialana (AMO). Són vint reptes que podeu intentar resoldre. En l'apartat final d'indicacions podrem confirmar les solucions trobades o si aneu perduts veure com podríeu començar.

EF1. (IMO 68). Sigui f una funció real definida per a tots els nombres reals x i tal que, per alguna constant positiva a, f satisfà l'equació $f(x+a) = \frac{1}{2} + \left(f(x) - [f(x)]^2\right)^{1/2}$, per a tot x. Demostreu que la funció f és periòdica (és a dir, existeix un nombre positiu b tal que $f(x+b) = f(x)$ per a tot x). Per $a = 1$, doneu un exemple d'una funció no constant que satisfaci les propietats esmentades anteriorment.

EF2. (IMO 72). Siguin f i g funcions reals definides per a tots els valors reals x, y i satisfent l'equació $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$, per tots els x, y. Demostreu que si $f(x)$ no és idènticament zero i si $|f(x)| \leq 1$ per a tot x, aleshores $|g(y)| \leq 1$, per a tot y.

EF3. (IMO 75). Trobeu tots els polinomis P de dues variables que satisfan les següents condicions:
(i) Per a un enter positiu n i per a tots els reals t, x, y és $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$; és a dir, P es homogeni de grau n.
(ii) Per a tots els reals $a, b, c,$ és

$$P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0,$$

(iii) $P(1, 0) = 1$.

EF4. (IMO 77). Sigui $f(n)$ una funció definida en el conjunt de tots els enters positius i amb valors en el mateix conjunt. Demostreu que si $f(n+1) > f(f(n))$ per a qualsevol enter positiu n, aleshores $f(n) = n$, per a tot n.

EF5. (IMO 78). El conjunt de tots els enters positius és la unió de dos subconjunts disjunts $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$ i $\{g(1), g(2), ..., g(n), ...\}$, ón $f(1) < f(2) < ... < f(n) < ...$, $g(1) < g(2) < ... < g(n) < ...$ i $g(n) = f(f(n)) + 1$ per a qualsevol $n \geq 1$. Determineu $f(240)$.

EF6. (IMO 81). La funció $f(x,y)$ satisfà les equacions:
(1) $f(0,y) = y+1$, (2) $f(x+1,0) = f(x,1)$, (3) $f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$, per a tots els enters no-negatius x, y. Determineu $f(4,1981)$.

EF7. (IMO 82). La funció $f(n)$ està definida per a tots els enters positius n i pren valors enters no negatius. Ademès, per a tot m, n és $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ o 1, $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ i $f(9999) = 3333$. Determineu $f(1982)$.

EF8. (IMO 83). Trobeu totes les funcions f definides en el conjunt dels nombres reals positius prenent valors reals positius i satisfent les condicions: $f(x \cdot f(y)) = yf(x)$ per a tots els positius x, y; $f(x) \to 0$ quan $x \to \infty$.

EF9. (IMO 84). Determineu totes les funcions contínues f tals que, per a tots els valors reals x, y, $f(x+y) \cdot f(x-y) = \{f(x) \cdot f(y)\}^2$.

EF10. (IMO 86). Trobeu totes les funcions f, definides en els nombres reals no negatius i prenent valors reals no negatius, tals que
(i) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ per tot $x, y \geq 0$;
(ii) $f(2) = 0$;
(iii) $f(x) \neq 0$ si $0 \leq x < 2$.

EF11. (IMO 87). Demostreu que no pot existir una funció f del conjunt dels enters no negatius en ell mateix tal que $f\left(f(n)\right) = n + 1987$ per a tot n.

EF12. (AMO 87). Una funció $f(m,n)$ està definida, per a tots els enters positius $m \geq n$, per:

(i) $f(m,n)=\sqrt{n+f(m,n+1)}$, si $m>n$;

(ii) $f(n,n)=\sqrt{n}$; per a tot n.

Proveu que $f(1988,1)<2$.

EF13. (IMO 88). Una funció f està definida en els enters positius per $f(1)=1$; $f(3)=3$; $f(2n)=f(n)$; $f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$; $f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$; per a tots els enters positius n. Determineu el nombre d'enters positius n, menors o iguals que 1988, per als quals $f(n)=n$.

EF14. (AMO 88). Una funció f satisfà les següents condicions

(i) Per a cada nombre racional x, $f(x)$ és un nombre real;

(ii) $f(1988)\neq f(1987)$;

(iii) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-f(xy)+1$, per tots els racionals x,y.

Demostreu que $f(-1987/1988)=1/1988$.

EF15. (AMO 89). Sigui $f(n)$ definida per a tots els enters positius n. Se sap que

(i) $f(f(n))=4n+9$, per a tot enter positiu n;

(ii) $f(2^k)=2^{k+1}+3$, per a tot enter no negatiu k.

Determineu $f(1789)$.

EF16. (IMO 90). Sigui $\mathbb{Q}^+$ el conjunt de nombres racionals positius. Construïu una funció $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ tal que $f(xf(y))=f(x)/y$, per a tots x,y en $\mathbb{Q}^+$.

EF17. (AMO 90). Sigui f una funció definida en tots els nombres reals i amb valors reals. Suposem que, per a tots els reals x,y, la funció f satisfà

(1) $f(2x)=f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi y}{2}\right)\right)+f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)\right)$;

(2) $f(x^2-y^2)=(x+y)f(x-y)+(x-y)f(x+y)$.

Demostreu que aquestes condicions determinen unívocament $f(1990+1990^{1/2}+$ $+1990^{1/3})$ i doneu el seu valor.

EF18. (IMO 92). Sigui $\mathbb{R}$ el conjunt dels nombres reals. Trobeu totes les funcions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tals que $f(x^2+f(y))=y+f(x)^2$, per a tot x,y en $\mathbb{R}$.

EF19. (IMO 93). Sigui $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$. Determineu si pot existir una funció $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $f(1)=2$, $f(f(n))=f(n)+n$ per a tot n en $\mathbb{N}$ i $f(n)<f(n+1)$, per tot n en $\mathbb{N}$.

EF20. (IMO 94). Sigui S el conjunt de nombres reals estrictament més grans que -1. Trobeu totes les funcions $f:S\to S$ satisfent les dues condicions:
(a) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, per a tot x,y en S;
(b) $f(x)/x$ és estrictament creixent en cada un dels intervals $-1<x<0$ i $0<x$.

Indicacions per a llegir... si cal.

EF1. Fixeu l'atenció en el període $b=2a$. Considereu l'exemple $\left(1+\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\right)/2$.

EF2. Suposeu que existís un punt y_0 on fos $|g(y_0)|>1$ i per ser $|f(x)|$ fitada considereu M la menor fita superior. Emprant l'equació obtindreu una contradicció.

EF3. Fent les substitucions $b=1-a$, $c=0$ i $c=1-a-b$ podreu verificar que $f(x)=P(x,1-x)+2$ satisfà l'equació bàsica de Cauchy. D'ací i usant (i) arribareu a $P(x,y)=(x+y)^{n-1}(x-2y)$.

EF4. Raoneu perquè $1\le f(1)<f(2)<f(3)<...$ i que passaria si existís un enter positiu k tal que $f(k)>k$.

EF5. Com sigui que $g(1)=f(f(1))+1>1$, $f(1)=1$ i $g(1)=2$. Demostreu aleshores que si $f(n)=k$ necessàriament és $f(k)=k+n-1$, $g(n)=k+n$ i $f(k+1)=k+n+1$. Emprant aquestes relacions provareu que $f(240)=388$.

EF6. A partir de les equacions determineu que $f(1,y)=y+2$, $f(2,y)=2y+3$, $f(3,y)=2^{y+3}-3$ i finalment $f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3$ (on hi han $y+3$ dosos en el primer terme).

EF7. Demostrareu que $f(n \cdot 3) \geq n$ i $f(3 \cdot n) = n$ si $n \leq 3333$. Usant $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$ establireu que $1982 \geq 3f(1982)$ i $f(1982) \geq 660$ o sigui $f(1982) = 660$.

EF8. Estudieu els possibles punts fixes de f. Provareu que $f(x) = 1/x$.

EF9. Demostreu que $f(-x) = f(x)$, $f(x) > 0$ i per inducció $f(n, x) = [f(x)]^{n^2}$. D'aquí provareu que $f\left(\frac{m}{n}\right) = (f(1))^{m^2/n^2}$ i per continuïtat $f(x) = f(1)^{x^2}$.

EF10. Observeu que $f(x) = 0$ si $x \geq 2$ i $f(y) = 2/(2-y)$ si $0 \leq y < 2$.

EF11. Si existís una funció f satisfent la condició donada seria $f(n+1987) = f(n)+1987$; $g(n) = f(n) - 1987$ seria inversa de f i $\{n|0 \leq n \leq 1986,\ f(n) < 1987\}$ conjuntament amb $\{n|0 \leq n \leq 1986,\ f(n) \geq 1987\}$ serien conjunts d'igual cardinal formant partició de $\{0, 1, ..., 1986\}$.

EF12. Feu inducció per a verificar que $f(m, n) < n + 1$ per tot $n \leq m$.

EF13. Cal verificar per inducció que $f(n)$ es el nombre obtingut capgirant el desenvolupament binari de n. Resulta que el nombre buscat és 92.

EF14. Proveu que necessàriament $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$ i que $f(x) = x+1$, per tot x racional.

EF15. Observeu que $4n + 9 = 2(2n + 3) + 3$ i $1789 = 2 \times 893 + 3$... fins a veure que $f(1789) = 3581$.

EF16. Demostreu que l'equació és equivalent a l'equació multiplicativa de Cauchy $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, la qual en $\mathbb{Q}^+$ té infinites solucions (arbitraris en els primers).

EF17. Podeu veure que $f(x) = 0$ per tot x, tot establint primer que f és parella, o sigui $f(-z) = f(z)$.

EF18. Proveu que $f(0) = 0$ i $f(f(x)) = x$, deduint d'aquest fet que necessàriament $f(x) = x$, per tot x, la qual cosa podeu provar mirant que passaria si $f(x) > x$ o $f(x) < x$.

EF19. Un exemple curiós és $f(n) = [n(1 + \sqrt{5})/2 + 1/2]$, on $[z]$ denota la part entera de z.

EF20. Proveu que $f(x) \neq x$ si $-1 < x < 0$ o $0 < x$. Deduïu d'aquí que $x+f(x)+xf(x) \equiv 0$ o sigui $f(x) = -x/(1+x)$.

Referències

Si voleu saber moltes coses d'equacions funcionals podeu consultar algun dels set llibres següents però s'us recomana molt especialment el primer per ser el llibre més important del tema.

[1] Aczél, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York-London, 1966.

[2] Aczél, J., *A Short Course on Functional Equations.* Reidel, Dordrecht, 1987.

[3] Aczél, J. i Dhombres, J., *Functional Equations in Several Variables.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] Kuczma, M., *Functional Equations in a Single Variable.* Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[5] Kuczma, M., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* P.W.N. Uniw. Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice, 1985.

[6] Kuczma, M., Choczewski, B i Ger, R., *Iterative Functional Equations.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press. Cambridge, 1988.

[7] Smital , J., *On Functions and Functional Equations*, Adam Hilger, Bristol, 1988.

JOCS I INVARIANTS

Sergi Elizalde i Torrent

En aquest capítol veurem algunes idees per resoldre problemes on es demana si és possible guanyar un cert joc seguint una estratègia apropiada, o bé si és possible, partint d'una certa situació inicial i seguint unes regles fixades, arribar a alguna altra situació determinada. Per cap d'aquests problemes sol ser necessari tenir gaires coneixements teòrics de matemàtiques, però alguns requereixen bastant enginy.

Jocs de tauler

Vegem un exemple senzill del primer tipus de problema.

Problema 1. Dos jugadors juguen en una taula rectangular. Per torn, col·loquen sobre la taula monedes de 100 pessetes de manera que no es superposin. Perd el jugador que no pot trobar lloc per la seva moneda a la taula. És possible que el jugador que fa el primer moviment guanyi el joc independentment de la mida de la taula (sempre i quan hi càpiga almenys la primera moneda)?

La resposta és que sí és possible. Una manera de provar que alguna cosa és possible és donar un algorisme general per fer-ho, que és el que farem.
El primer moviment del primer jugador consistirà en posar una moneda en el centre de la taula. Naturalment, els moviments del segon jugador són arbitraris, però hem de donar una estratègia pel primer jugador de manera que guanyi independentment del que faci el segon. Suposem que cada jugador ha fet k moviments. Llavors, el moviment $k+1$-èsim del primer jugador serà posar la seva moneda en el lloc simètric respecte el centre del lloc on ha posat el segon jugador la seva k-èsima moneda. La raó per la que aquest moviment sempre és possible és perquè en tot moment, després de moure el primer jugador, la configuració de monedes és simètrica. Si el segon jugador pot col·locar la seva moneda,

el lloc simètric també estarà buit, i per tant el primer jugador també pot moure sempre. En algun moment, per tant, serà el segon jugador el que es quedi sense lloc, així que el primer guanya.

Invariants

En molts d'aquests problemes pot ser molt útil trobar el que s'anomena un *invariant*, que és un valor que es manté constant al llarg del joc. Vegem-ne un exemple.

Problema 2. Sobre la taula hi ha dues caixes de galetes, una amb 17 galetes i una altra amb 16. Dos jugadors fan els seus moviments per torn. Cada jugador, en un moviment, pot optar per fer una de les següents coses:

1. Menjar-se dues galetes d'una qualsevol de les caixes (les dues de la mateixa), o bé
2. Passar una galeta de la segona caixa a la primera.

Perd el jugador que no pot fer el seu moviment. Quin jugador guanya?

Si intentes aquest joc amb un amic diverses vegades, apart de quedar-te ben tip de galetes, observaràs que sempre guanya el segon jugador. Quina és la raó? Si et fixes bé en com funciona el joc, notaràs que, en cada moviment, la diferència entre el nombre de galetes de la primera i la segona caixa augmenta o disminueix en 2. Anomenem d a aquest valor. Augmenta en 2 si mengem 2 galetes de la segona caixa o si en passem una de la segona a la primera; disminueix en 2 si mengem 2 galetes de la primera caixa. Per tant, en cada ronda de moviments (un de cada jugador) d varia en 4, 0 o -4. Com que al principi $d = 1$, això implica que sempre serà $d \equiv 1 \mod 4$ (recorda que això vol dir que $d-1$ és múltiple de 4) quan li toqui moure al primer jugador, i sempre $d \equiv 3 \mod 4$ quan hagi de moure el segon.

Però ens quins casos $d \equiv 3 \mod 4$? Pot ser que hi hagi més galetes a la segona caixa que a la primera ($d < 0$), i en aquest cas el segon jugador segur que pot moure, perquè pot passar una galeta de la segona a la primera caixa. Si, en canvi, hi ha més galetes a la primera caixa que a la segona ($d > 0$), llavors el fet que $d \equiv 3 \mod 4$ assegura que com a mínim hi ha 3 galetes a la primera caixa, i per tant el segon jugador també pot fer el seu moviment, menjant-se'n dos. Així veiem que el segon jugador sempre por moure, i per tant és el primer el que perd.

Alguns problemes pregunten si és possible passar d'una situació inicial a una altra fent unes determinades transformacions. Per demostrar que sí és possible, hauríem de donar els passos que hem de seguir per passar de la situació inicial a la final. En canvi, per demostrar que no és possible (que és el que s'ha de fer en gran part dels problemes), els invariants són l'eina més poderosa. La tècnica consisteix en trobar una funció (l'invariant) que compleixi les dues propietats següents:

1. En fer cada una de les transformacions permeses, el valor de la funció no varia.

2. El seu valor a la situació inicial és diferent del valor que pren a la situació a la que es pretén arribar.

Si aconseguim trobar-la, llavors haurem demostrat que és impossible arribar a la situació que es demana. Vegem-ne uns quants exemples.

Problema 3. Tres granotes estan jugant a saltar unes per damunt de les altres. Cada granota pot saltar per sobre de qualsevol altra, sempre anant a parar a l'altre costat a la mateixa distància d'ella que abans (és a dir, al punt simètric al de partida respecte a la granota que s'ha saltat). Inicialment, les granotes ocupen posicions en tres vèrtexs d'un quadrat. És possible que, durant el joc, una d'elles aparegui al quart vèrtex del quadrat?

Podríem provar de donar una successió de moviments fins situar una granota al quart vèrtex. Veient que no ens en sortim, pensem que la resposta deu ser negativa, i per demostrar-ho hem de recórrer a un invariant.

Escollim coordenades al pla de manera que les posicions inicials de les granotes siguin $A=(0,1)$, $B=(0,0)$ i $C=(1,0)$. Hem de decidir si una granota pot o no aparèixer en $D=(1,1)$. Primer busquem les coordenades (a',b') d'una granota després de saltar des del punt (a,b) per sobre d'una que està en (c,d). Com que $\frac{a+a'}{2}=c$ i $\frac{b+b'}{2}=d$, tenim que

$$a'=2c-a\ ,:\ b'=2d-b$$

La primera conclusió trivial és que, després de cada salt, les coordenades segueixen sent enteres. La segona, que és el punt clau del raonament, és que les paritats de les dues coordenades d'una granota no canvien quan fa un salt. Així doncs, les granotes que han començat en A i en C sempre tindran una coordenada parell i una altra senar, mentre que la que ha començat en B tindrà les dues parells. En qualsevol cas, cap granota pot aparèixer en D.

Amb això ara potser sabràs resoldre el següent problema, que és molt similar.

Problema 4. Quan el capità James Cook va visitar una petita illa prop de Nova Zelanda va observar que només hi vivien camaleons, que podien canviar de color si volien. En total n'hi havia 20 de blaus, 19 de grisos i 18 de violetes. Cook va notar que quan es trobaven dos camaleons de colors diferents, immediatament tots dos canviaven els seus colors al tercer (d'entre els 3 colors possibles), i que no canviaven de color en cap altre cas. És possible que tots els camaleons siguin ara del mateix color?

Aquí, per trobar l'invariant, observem el nombre de camaleons de cada color mòdul 3. Si en algun moment hi ha k camaleons blaus, l grisos i m violetes, i es troben, per exemple, un camaleó blau i un de gris, el nombre de camaleons de cada color passa a ser $k-1$, $l-1$ i $m+2$ respectivament. Però $m+2 \equiv m-1 (\mod 3)$, i així veiem que els tres nombres mòdul 3 canvien de forma concordant (és a dir, $k-l \mod 3$ i $k-m \mod 3$ són invariants). En particular, com que els residus mòdul 3 al principi eren diferents (2, 1 i 0 respectivament), sempre ho seran, i mai podran ser tots els camaleons del mateix color, ja que en aquest cas els tres residus haurien de ser 0.

El problema que ve a continuació es pot resoldre molt ràpidament amb un invariant.

Problema 5. En els 6 vèrtexs d'un hexàgon regular hi escrivim els nombres $1, 0, 1, 0, 0, 0$ (en sentit antihorari, per exemple). Podem augmentar en 1 dos nombres contigus sempre que volguem. És possible aconseguir que els 6 nombres siguin iguals fent només passos d'aquesta mena?

Suposem que $a_1, \ldots, a_6$ són els nombres que hi ha en els vèrtexs en un moment determinat. Llavors, $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ és un invariant, ja que sumant 1 a dos nombres contigus no queda afectat. Com que al principi $I = 2$, no posem arribar mai a la situació que ens demanen, amb $I = 0$.

La dificultat d'aquests problemes és trobar l'invariant adequat. Observa com d'elegant és la solució del següent:

Problema 6. Partint de la taula de la figura 1, podem fer les següents transformacions:

1. Canviar els signes d'una fila.

2. Canviar els signes d'una columna.

3. Canviar els signes d'una paral·lela a una diagonal (en particular, podem canviar el signe de les caselles dels extrems).

Demostreu que sempre quedarà algun -1 a la taula.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

"Només" cal observar que el producte dels nombres de les 8 caselles de la vora que no són els 4 extrems sempre és -1. És invariant per totes les transformacions, ja que cada una d'aquestes, o bé canvia de signe exactament 2 de les 8 caselles, o bé no en canvia cap. Per tant, no posem arribar mai a la situació en què no hi ha cap -1.

Una altra tècnica que moltes vegades s'utilitza combinada amb els invariants és la de començar amb la situació a la que volem arribar i anar tirant enrere. Vegem un exemple bastant senzill on aquesta tècnica és útil.

Problema 7. S'escriuen al voltant d'un cercle 5 uns i 4 zeros en qualsevol ordre. A cada pas, entre dues xifres iguals s'hi posa un 0 i entre dues xifres diferents, un 1, i s'esborren els 9 nombres originals. Proveu que repetint aquest procés indefinidament no podem arribar mai a tenir 9 zeros.

Suposem el contrari, és a dir, que sí que podem arribar a tenir 9 zeros. La situació immediatament anterior a la primera vegada que surten els 9 zeros ha de ser la de tenir 9 uns. Llavors l'anterior a aquesta hauria de ser alternant $1, 0, 1, 0, \ldots$, ja que dues xifres de costat haurien de ser diferents. Però això és impossible, ja que 9 és senar.

Funcions comptadores

No existeix cap successió infinita d'enters positius estrictament decreixent. Això ho podem usar provar que un algorisme acaba en un nombre finit de passos. Només cal trobar una funció, que anomenarem *funció comptadora*, que prengui valors naturals i que decreixi estrictament a cada pas de l'algorisme.

Problema 8. En una reunió de $2n$ ambaixadors, cada un té com a molt $n-1$ enemics. És possible asseure els ambaixadors al voltant d'una taula rodona de manera que no quedin dos enemics de costat?

Resoldrem aquest problema usant una funció comptadora. Primer asseiem els $2n$ ambaixadors de qualsevol manera, i anomenem H al nombre de parelles d'ambaixadors enemics que han quedat assegudes de costat. Si H fos 0 ja hauríem acabat. El que farem serà, suposant que $H > 0$, canviar alguns ambaixadors de lloc de manera que el nou nombre H' de parelles d'enemics asseguts de costat disminueixi estrictament, és a dir, $H' < H$. Provant que podem fer això haurem resolt el problema, ja que aplicant el procés repetidament un nombre finit de vegades, necessàriament hem d'acabar amb una $H = 0$.

El procés per reduir la H quan és més gran que 0 és com segueix. Suposem que $n > 1$, ja que en el cas $n = 1$ no hi ha enemics i és trivial. Siguin A i B dos ambaixadors enemics que han quedat de costat (suposem B a la dreta de A). Si trobem dos altres ambaixadors A' i B', asseguts B' a la dreta de A', i de manera que A' és amic de A i B' és amic de B, aleshores girant l'arc format pels ambaixadors asseguts entre B i A' (ambdós inclosos, és a dir, els ambaixadors que trobem partint de B cap a la dreta fins que arribem a A'), aconseguirem reduir estrictament el nombre de parelles d'enemics assegudes de costat. Efectivament, s'ha destruït la parella d'enemics AB, i les noves parelles que s'han format són AA' i BB', que són d'amics, o sigui que no ha aparegut cap nova parella d'enemics.

Falta veure que podem trobar A' i B'. Com que A té com a molt $n-1$ enemics, i un d'ells és B, tindrà almenys n amics entre els $2n-2$ ambaixadors restants. Considerem ara els ambaixadors asseguts a la dreta d'aquests amics de A. Com que són almenys n, no poden ser tots ells enemics de B, i per tant n'hi haurà algun que serà amic de B. Prenem com a B' algun d'ells, és a dir, un amic de B assegut a la dreta d'un amic de A, i prenem com a A' l'amic de A assegut a l'esquerra de B'. Això resol el problema.

En el següent problema, que va aparèixer a la IMO de 1986, es dóna un algorisme i ens demanen demostrar que acaba en un nombre finit de passos.

Problema 9. En els vèrtexs d'un pentàgon s'hi escriuen 5 nombres reals x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, amb suma positiva $s = \sum_{i=1}^{5} x_i > 0$. Si hi ha alguna terna (x, y, z) de nombres corresponents a vèrtexs consecutius tal que $y < 0$, llavors es substitueix per $(x+y, -y, z+y)$. Aquest procés es repeteix mentre algun dels 5 nombres sigui negatiu. Decideix si l'algorisme sempre acaba.

La resposta és que sí que acaba, és a dir, després d'un nombre finit d'iteracions els 5 nombres són positius. Resoldrem aquest problema donant una funció comptadora que prengui valors enters positius i que decreixi estrictament a cada pas. No és gens fàcil trobar-la. Una possible funció és la següent:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2$$

Ara només cal comprovar que compleix el que volíem. D'una banda, el fet que f sigui suma de quadrats assegura que $f \geq 0$, i també és clar que pren valors enters. D'altra banda, suposem ara que algun dels nombres x_i és negatiu. Per simetria, podem suposar que és $x_4 < 0$. En aquest cas, és un simple càlcul comprovar que la variació de la funció comptadora és $f_{\text{nova}} - f_{\text{vella}} = f(x_1, x_2, x_3 + x_4, -x_4, x_5 + x_4) - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2sx_4 < 0$. Aquest valor és negatiu ja que $s > 0$ i $x_4 < 0$, i així doncs f decreix estrictament a cada pas. Per tant, en algun moment tots 5 nombres seran positius, perquè de no ser així, els valors de f donarien una successió infinita estrictament decreixent d'enters positius, que és impossible.

Acoloriments

Una altra tècnica molt útil per demostrar que una cosa és impossible consisteix en acolorir els elements que estem tractant (equivalentment, en dividir el conjunt en un nombre finit de subconjunts, cada un corresponent a un color). L'exemple següent, molt típic, usa dos colors.

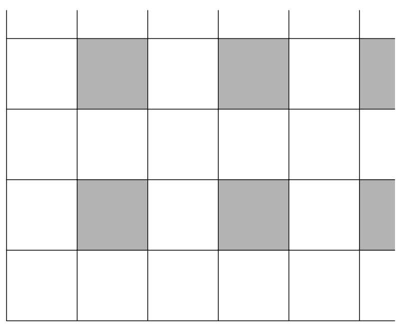
Problema 10. Considerem una quadrícula 6×6 d'on traiem els quadradets superior esquerre i inferior dret. És possible cobrir la figura resultant amb *dòminos* (rectangles 2×1) sense que es superposin ni surtin fora de la figura?

Si intentes cobrir l'àrea veuràs que no te'n surts, però, com demostrem que és impossible? Aquí la idea és imaginar-se la quadrícula amb els quadradets 1×1 pintats de blanc i negre alternativament, com un tauler d'escacs. Una idea aparentment tan simple resulta aquí ser clau. Ara la solució és òbvia si ens adonem que cada peça de dòmino cobreix un quadrat blanc i un de negre, i que per tant qualsevol àrea que es pugui cobrir amb dòminos ha de tenir tants quadrats blancs com negres. En canvi, la nostra figura no és així, ja que a la quadrícula inicial li hem tret dos quadrats del mateix color.

No sempre la manera d'acolorir és tan senzilla. En el problema següent no funciona l'acoloriment com un tauler d'escacs.

Problema 11. Un terra rectangular és cobert amb rajoles 2×2 i 1×4. Quan ja ha estat cobert, una rajola es trenca, i no en queden més del mateix tipus que la trencada, però sí una de l'altra classe. Proveu que no és possible tornar a cobrir el terra recol·locant les rajoles.

Tindríem el problema resolt si aconseguíssim acolorir els quadrats del terra (imaginant-lo com una quadrícula de quadrats 1×1) de manera que els coberts per una rajola de tipus 2×2 tinguessin sempre colors diferents dels coberts per una rajola 4×1. Desafortunadament, acolorint com un tauler d'escacs, tant una rajola com l'altra cobreixen 2 quadrats de cada color. La manera d'acolorir aquí és la del dibuix següent:



És a dir, donant dues coordenades a cada quadrat de la manera natural, pintem de negre els quadrats que tenen les dues coordenades parells, i de blanc la resta. Llavors, una rajola 4×1 cobreix 0 o 2 quadrats negres, i en canvi una 2×2 cobreix sempre exactament 1 quadrat negre. Així doncs, no podrem substituir cap rajola per una de l'altre tipus si volem cobrir el mateix terra.

De vegades es requereixen més de 2 colors. En alguns problemes no està clar ni tan sols què hem d'acolorir. Vegem ara un problema clàssic, anomenat *Problema de la Galeria d'Art*.

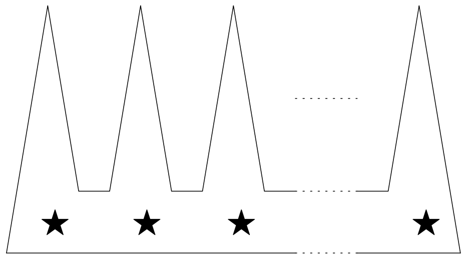
Problema 12. Una galeria d'art té la forma d'un polígon de n costats. Troba el nombre mínim de vigilants necessaris per controlar tota la galeria, qualsevol que sigui la forma del polígon. (Suposem que cada vigilant se situa en un punt i controla el que es pot veure des d'aquell punt en totes les direccions.)

Aquest problema no és trivial. En alguns casos, com per exemple quan el polígon és regular (més en general, quan és estrellat), amb un vigilant n'hi ha prou. Ens demanen, però, un nombre de vigilants que serveixi per qualsevol n-àgon. Amb n vigilants, posant-ne un a cada vèrtex, controlem qualsevol galeria, però en realitat mai són necessaris tants. Quin és, doncs, el mínim nombre de vigilants que es necessiten?

Triangulem el polígon usant diagonals que no s'intersequin, de manera que totes les regions del polígon triangulat són triangles. Es pot provar per inducció que sempre existeix una triangulació així, però no ho veurem aquí. Ara, acolorim els vèrtexs usant 3 colors, de manera que cada triangle tingui els 3 vèrtexs de diferent color. Vegem tot seguit que això ho podem fer, per inducció sobre el nombre de vèrtexs. Per 3 vèrtexs és trivial, només cal pintar-ne un de cada color. Per $n > 3$, traient un vèrtex que pertanyi només a un triangle, el que queda és una triangulació d'un polígon de $n - 1$ costats, que per hipòtesi d'inducció podem acolorir. Llavors, només cal pintar el vèrtex que havíem tret del color que no coincideix amb cap dels colors dels seus 2 veïns.

Finalment, escollim el color menys usat, i posem un vigilant en cada un dels vèrtexs pintats d'aquest color. D'aquesta manera, com que cada triangle tindrà un vigilant en exactament un vèrtex, estarà vigilat, i en conseqüència els guàrdies cobriran tot el polígon. El nombre de vigilants que necessitem és doncs com a molt $[n/3]$.

Amb això hem trobat una fita superior pel nombre mínim de vigilants. Però encara no estem segurs que sigui òptima. Per confirmar-ho, hem de trobar un polígon de n costats en el que amb menys de $[n/3]$ vigilants no n'hi hagi prou. La galeria de la figura demostra que en alguns casos són necessaris $[n/3]$ guàrdies, ja que cada punxa l'ha de vigilar un guàrdia diferent.



Altres jocs i estratègies

A continuació veurem un joc bastant conegut on l'estratègia guanyadora és força més complicada.

Problema 13. Es posen pedres distribuïdes en files de la següent manera: 1 a la primera fila, 3 a la segona, 5 a la tercera i 7 a la quarta. Dos jugadors, alternativament, poden a cada tirada agafar les pedres que vulguin d'una mateixa fila (n'han d'agafar almenys una). Guanya el jugador que agafa l'última pedra.

Aquesta distribució inicial de les pedres és només un exemple, el joc es pot fer de moltes maneres. Prefereixes ser el primer jugador o el segon? Per aquesta posició inicial, és el segon jugador qui pot tenir una estratègia guanyadora. Si penses una mica en com ha de ser aquesta estratègia, t'adonaràs que no és tan senzilla com pot semblar en un principi. És interessant observar que si el segon jugador aconsegueix arribar a una configuració on les files es puguin aparellar, cada una amb una altra amb el mateix nombre de pedres (per exemple, si els nombres de pedres a les 4 files fossin $1, 3, 3, 1$), llavors està clar que té la partida guanyada. En efecte, a partir d'aquí només cal que imiti els moviments del primer jugador, agafant el mateix nombre de pedres que aquest, però de la fila aparellada. Seguint aquesta estratègia, el segon jugador sempre agafarà l'última pedra.

Desgraciadament, la configuració inicial no es pot aparellar d'aquesta manera. Ara veurem que no cal exigir-li tant. El truc està en representar el nombre de pedres de cada fila en base 2. En el nostre cas $(1, 3, 5, 7)$, tenim, respectivament, 1, 11, 101 i 111. Si ara sumem les xifres de les unitats d'aquests 4 nombres, dóna $1 + 1 + 1 + 1 = 4$; sumant les xifres de les "desenes", obtenim $1 + 0 + 1 = 2$; i sumant les de les "centenes", $1 + 1 = 2$. Els tres resultats són parells, i això serà precisament el que el segon jugador haurà de mantenir després de cada tirada seva per guanyar la partida.

Vegem primer que si ho aconsegueix mantenir, guanya. En efecte, excepte en el cas que les tres sumes són 0, que vol dir que ell (el segon jugador) acaba d'agafar l'última pedra i per tant ha guanyat, quan alguna de les tres sumes no és 0, el fet que sigui parell implica que hi ha d'haver en aquella posició almenys dos 1's (no n'hi pot haver un sol), i això es tradueix en que almenys 2 files són no buides. Així doncs, quan mogui el primer jugador, mai podrà guanyar en aquella tirada perquè només pot agafar pedres d'una fila. El primer jugador no agafa mai l'última pedra, i per tant, seguint així, serà el segon qui l'agafarà.

Falta veure encara que el segon jugador pot restablir en cada tirada seva el fet que les tres sumes de xifres de les expressions en base 2 siguin parells. Notem primer que quan, sent aquestes sumes parells, mou el primer jugador, necessàriament ho torna a "espatllar", ja que de la fila on agafa les pedres segur que en canvia alguna xifra, i llavors la suma corresponent passa a ser senar. Imaginem que ara ha de moure el segon jugador. Com que alguna suma és senar, considerem, d'entre les sumes senars, la de xifres de més a l'esquerra. Sigui f una fila que tingui un 1 en aquesta posició, que anomenarem p. Es tracta de canviar el nombre de pedres en f de manera que la seva expressió en base 2 tingui un 0 en la posició p i a més es canviïn exactament les xifres a la dreta de p per les quals la suma era senar. Així aconseguim que totes les sumes siguin parells. Això ho podem fer agafant pedres, gràcies a que el nou nombre que volem posar a f és més petit que el que hi havia, ja que la xifra de més a l'esquerra de les que canviem és la de p, que passa de 1 a 0.

Hem demostrat doncs que el segon jugador té una estratègia guanyadora. Si hi jugues amb els teus amics, observa que si fas de primer jugador però el segon no juga segons l'estratègia descrita, llavors podràs fer tu una tirada que deixi les tres sumes parells, i a partir d'aquí aplicar l'estratègia per guanyar tu el joc.

Si la configuració inicial no satisfà la condició de tenir totes les sumes parells, llavors és el primer jugador qui té l'estratègia guanyadora. Simplement, en la primera tirada, ha de fer que es passi a complir la condició.

Per acabar, el següent problema sembla més aviat un passatemps, però fa pensar una estona i pot donar idees interessants.

Problema 14. Hi ha 30 presoners en fila índia (els suposem ordenats de l'1 al 30). A cada un li posen un barret, de color blanc o negre, però de manera que cada un només veu els barrets dels presoners que estan davant seu, no el seu ni els de darrera. De darrera cap endavant, començant pel presoner 30, cada un diu un color, "blanc" o "negre". Si encerta el color del seu barret, es salva; si falla, és executat. El color que diu és l'única informació que un presoner pot donar als altres una vegada porten els barrets posats. Quina estratègia (planificada prèviament) poden seguir els 30 presoners per tal de salvar-se'n el màxim nombre possible? (És a dir, a cada presoner li importa més el nombre total de persones salvades que no pas el fet de salvar-se a sí mateix.)

Hi ha algunes estratègies elementals que permeten salvar almenys la meitat dels presoners. Per exemple, si el primer a parlar diu el color que predomina en els 29 barrets que ell veu, i tots els altres simplement repeteixen aquest color, se salvaran en el pitjor dels casos 15 presoners. També garantim això si el presoner 30 diu el color del barret del presoner 29, i aquest el repeteix, salvant-se doncs; el presoner 28 diu el color del 27, i aquest diu el mateix, salvant-se; i així successivament. D'aquesta manera es salven com a mínim els presoners de les posicions senars. Però hi ha maneres molt millors de fer-ho.

És convenient assignar 0 i 1 als colors (per exemple, "blanc"=0, "negre"=1). Observa que la informació que pot transmetre cada presoner als seu companys de davant és un bit, 0 o 1. Cada presoner té la informació que li han transmès els que han parlat abans que ell, i a més la informació dels colors del barrets que veu. En les estratègies anteriors veiem que aquesta informació no és aprofitada al màxim. En el primer cas, cada presoner usa només la informació que li ha donat el 30, i res més. En el segon cas, el presoner 29 no usa la informació dels barrets que veu, de manera que el presoner 28 no rep cap informació que li serveixi. L'estratègia òptima és la següent.

El primer a parlar (el presoner 30) diu el color corresponent a la suma (a $\mathbb{Z}_2$, és a dir, considerant $1+1=0$) dels colors dels 29 presoners de davant. Ara, el presoner 29 pot sumar els colors dels barrets de davant seu i, restant-ho (que en aquest cas és el mateix que sumar-ho) del que havia dit el presoner 30, pot deduir quin és el seu color, dir-lo i salvar-se. El presoner 28 ha sentit quant sumen els dels 29 primers presoners, i el color del presoner 29, i per tant pot deduir-ne la suma dels 28 primers. A partir d'això, sumant els 27 presoners que veu, pot conèixer quin és el seu color, i salvar-se. Així, successivament, es salven tots els presoners des del 29 fins l'1. L'únic que ha de fer el presoner i $(1 \leq i \leq 29)$ és restar, del que ha dit el presoner 30 (la suma dels 29 primers), el que ha dit cada un dels altres presoners que ja han parlat (el seu respectiu color), i també la suma del colors dels barrets que ell veu davant seu. El que quedi és el color del seu barret.

Clarament aquesta estratègia és la millor possible, ja que salva almenys 29 dels 30 presoners. Naturalment no hi ha cap tàctica que garanteixi que el presoner 30 es salvarà, ja que no pot deduir cap informació sobre el color del seu barret.

Problemes

JI1. Dos jugadors estan jugant sobre una banda de $1 \times n$ caselles quadrades. Els moviments són alternatius, i en cada un es pot tatxar o bé una casella qualsevol o bé un parell de caselles contigües. Perd el jugador que no pot fer un moviment. Prefereixes ser el primer o el segon jugador?

JI2. Dos jugadors A i B juguen al següent joc. Parteixen del polinomi $x^3 + \square\, x^2 + \square\, x + \square$, on $\square$ indica que hi falta el coeficient. A comença posant un enter no nul qualsevol en qualsevol dels llocs buits. A continuació, B posa un enter arbitrari en un dels dos llocs restants i finalment A acaba posant un enter qualsevol al forat que queda. Demostreu que A pot jugar de manera que les 3 arrels del polinomi resultant siguin enteres.

JI3. Un llop es troba en el centre d'un camp quadrat, i 4 gossos estan als vèrtexs. El llop es pot moure en qualsevol direcció, mentre que els gossos només es mouen pels costats del quadrat. La velocitat de cada gos és 1'5 vegades la del llop. El llop pot matar a cada gos per separat, però quan es troba dos gossos junts, el maten a ell. Demostreu que els gossos sempre poden matar el llop si aquest intenta sortir del quadrat.

JI4. S'escullen n caselles arbitràries d'una quadrícula. Proveu que com a mínim n'hi ha $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ que no es toquen (ni per un vèrtex).

JI5. Hi ha una fitxa a la casella superior esquerra d'una quadrícula $n \times n$. Dos jugadors mouen alternativament la fitxa cap a una de les caselles que tenen una aresta comú amb la que ocupa la fitxa. No es permet moure la fitxa a una casella on ja hi hagi estat anteriorment. Perd el jugador que no pot fer el seu següent moviment. Proveu que, si n és parell, el primer jugador té estratègia guanyadora, i si n és senar, és el segon qui la té.

JI6. Tenim escrit $x^{10}+\square\, x^9+\square\, x^8+\ldots+\square\, x^2+\square\, x+1$, on $\square$ indica que hi falta el coeficient. Dos jugadors, alternativament, escullen un nombre real arbitrari i l'escriuen en qualsevol dels llocs que queden buits en aquell moment. Si el polinomi resultant no té arrels reals, guanya el primer jugador; si com a mínim té una arrel real, guanya el segon. Té alguna manera el segon jugador de guanyar sempre?

JI7. En el vèrtex A_1 del dodecàgon regular $A_1A_2\cdots A_{12}$ s'hi escriu un -1, i en cada un dels altres vèrtexs s'hi escriu un 1. Es permet canviar els signes de qualsevol grup de 6 vèrtexs consecutius. Demostreu que és impossible obtenir un -1 en A_2 i un 1 en tots els altres vèrtexs. Considereu el mateix problema pels casos de 4 i 3 vèrtexs consecutius.

JI8. Tres màquines poden llegir i imprimir targes amb un parell d'enters positius. La primera, quan llegeix la tarja (a,b), imprimeix una nova tarja $(a+1,b+1)$. La segona, si llegeix (a,b) i tots dos són parells, imprimeix $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$. La tercera llegeix dues targes (a,b) i (c,d) i, si $b=c$, imprimeix una tarja (a,d). Les targes llegides poden ser reutilitzades tantes vegades com calgui. Inicialment només tenim la tarja $(5,19)$. És possible arribar a imprimir les targes $(1,50)$ o $(1,100)$?

JI9. Els *tetròminos* són les cinc peces del joc del *Tetris*, és a dir, totes les figures que es poden formar amb 4 quadrats iguals ajuntant-los entre ells per un costat comú. És possible formar un rectangle amb els cinc tetròminos?

JI10. Una quadrícula 6×6 es cobreix amb dòminos 2×1. Proveu que sempre hi ha almenys una recta que travessa el rectangle sense tallar cap dòmino.

Algunes idees per a les solucions

Solució del problema JI1

Pensa en una estratègia semblant a la del problema de posar monedes en un tauler. Com ho pot fer el primer jugador per a que, després de tirar ell, la configuració de caselles marcades sigui sempre simètrica?

Solució del problema JI2

A pot començar posant un -1 al terme de la x.
Faci el que faci ara B, en l'últim moviment A en té prou posant al lloc buit l'enter oposat al que B havia escrit. Això és degut a què el polinomi obtingut té la forma x^3-ax^2-x+a, amb a enter, i per tant les seves arrels són $-1, 1, a$.

Solució del problema JI3

Al principi, les dues diagonals del quadrat es tallen al centre, on es troba el llop. Quan el llop es mou, considera les dues rectes que passen per la seva posició i que són paral·leles a les diagonals. En general, les interseccions d'aquestes rectes amb el quadrat són quatre punts.
La situació inicial és que els gossos es troben en aquests quatre punts, que coincideixen amb els vèrtexs. Ara, per qualsevol moviment que faci el llop, aquests quatre punts es mouen sempre a una velocitat inferior a 1.5 vegades la del llop, així que els gossos es poden desplaçar situant-se sempre sobre aquests punts. Si ho fan així, quan el llop arribi a la frontera del quadrat, sempre es trobarà amb dos gossos alhora, i el mataran.

Solució del problema JI5

Si n és parell, es pot cobrir fàcilment la quadrícula $n \times n$ amb dòminos (per exemple, posant $\frac{n}{2}$ dòminos verticals a cada columna).
Al principi de la partida, la fitxa ocupa un dels 2 quadrats d'un cert dòmino. El primer jugador la pot moure a l'altre quadradet del dòmino. D'aquesta manera, quan mogui el segon jugador posarà la fitxa en un dòmino per on la fitxa no ha passat, i el primer jugador sempre podrà moure-la a l'altre quadrat del mateix dòmino. Quan hagi passat per tots els dòminos, el segon jugador no podrà moure.
Si n és senar, la quadrícula $n \times n$ no es pot cobrir amb dòminos, perquè té un nombre senar de quadradets. El que sí es pot cobrir és la figura que resulta de suprimir-ne el quadradet superior esquerre on es troba la fitxa inicialment (per exemple, omplint la fila

superior amb $\frac{n-1}{2}$ dòminos horitzontals, i la quadrícula $(n-1)\times n$ restant amb $\frac{n-1}{2}$ dòminos verticals a cada columna). Ara és el primer jugador el que enceta un nou dòmino en cada moviment, i el segon sempre pot moure la fitxa completant el dòmino, així que en aquest cas serà el primer el que es quedarà sense poder moure.

Solució del problema JI7

Identificant cada A_i amb el nombre que hi ha escrit, el producte $A_2 \cdot A_3 \cdot A_8 \cdot A_9$ és invariant. Com que al principi val 1, mai podrà donar -1.
En el cas en què es pot canviar el signe de 4 vèrtexs consecutius, $A_2 \cdot A_3 \cdot A_6 \cdot A_7 \cdot A_{10} \cdot A_{11}$ és invariant.
En el cas de 3 vèrtexs, el producte $A_2 \cdot A_3 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_8 \cdot A_9 \cdot A_{11} \cdot A_{12}$ no varia.

Solució del problema JI8

Observa que si existeix un cert natural senar m tal que totes les targes que tens són de la forma (a, b) amb $a \equiv b(\mod m)$, llavors totes les targes que en puguis obtenir seran d'aquesta forma. La condició de m senar és necessària per assegurar que si a i b són parells i $a \equiv b(\mod m)$, llavors $\frac{a}{2} \equiv \frac{b}{2}(\mod m)$.
Amb la observació anterior, prenent $m = 7$ veiem que no es pot arribar a imprimir $(1, 100)$, ja que $5 \equiv 19(\mod 7)$ i en canvi $1 \not\equiv 100 \equiv 2(\mod 7)$.
Pensa com construir targes de la forma $(5, 5 + 14k)$, amb $k \geq 1$, usant la primera i la tercera màquina diverses vegades. Amb això pots arribar a $(8, 8 + 14 \cdot 28)$, i per tant, amb la segona màquina tres vegades, a $(1, 50)$.

Solució del problema JI9

En cas que es pogués formar un rectangle, seria de 20 quadrats, i el podríem acolorir com un tauler d'escacs amb 10 quadrats blancs i 10 de negres.
El tetròmino amb forma de T cobriria 3 quadrats d'un color i un de l'altre, mentre que tots els altres cobririen 2 quadrats de cada color. Per tant, no és possible.

Solució del problema JI10

Per simplificar, anomenarem *línia neta* a qualsevol recta que travessi el rectangle sense tallar cap dòmino.
Fes la demostració per reducció a l'absurd. Suposa que tinguéssim la quadrícula coberta sense que existissin línies netes. Intenta arribar a contradicció comptant quantes línies no netes poden tallar un dòmino i, recíprocament, quin és el nombre mínim de dòminos que pot tallar una línia no neta.

Cada dòmino impedeix la possible existència d'*exactament una* línia neta. D'altra banda, és impossible que una línia no neta talli només un dòmino, perquè llavors el que queda a cada costat de la línia són rectangles $6 \times t$ i $6 \times (6-t)$ (per certa t), on un quadrat correspon al dòmino tallat, i per tant la resta de cada un dels rectangles té àrea senar, així que no pot ser cobert per dòminos.
Com que cada línia no neta ha de tallar almenys 2 dòminos, i cada dòmino només pot ser tallat per una línia, almenys hauríem de tenir 20 dòminos. Però l'àrea de la quadrícula 6×6 és 36, així que només hi ha 18 dòminos. Hem arribat a contradicció.

Referències

Bellot, F. *Apunts sobre una lliçó d'Arkadii Sliinko*, Universitat d'Auckland.
Engel, A., *Problem Solving Strategies.* Springer.

EL PODER DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA

Francisco Bellot Rosado

1. Introducció

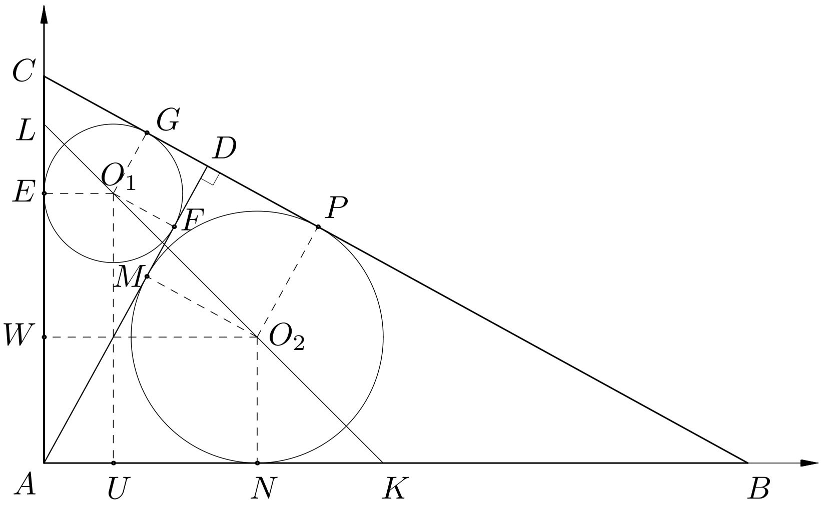
En general, a l'Olimpíada Internacional no se solen proposar problemes de Geometria Analítica en el sentit més estricte; fins i tot es procura que els que proposen de Geometria no tinguin una solució analítica fàcilment visible. De fet, des de 1959 fins 1987, només quatre problemes (que s'inclouen al final sense solució) eren susceptibles d'aquest tractament. Però, malgrat tot, i des de 1988, tal com veurem als exemples següents, força vegades l'elecció adequada d'un sistema de referència permet resoldre, amb un bagatge teòric mínim, problemes que resolts sintèticament exigeixen un gran nombre de resultats clàssics, absolutament desconeguts per bona part dels nostres estudiants (i tal vegada, també, de bastants professors).

Problema 1. *(núm. 5, IMO 1988, proposat per Grècia.)* ABC és un triangle rectangle en A, i D és el peu de l'altura des de A. La recta que uneix els incentres dels triangles ABD i ACD talla AB en K i AC en L. Si S és l'àrea de ABC, i T la de AKL, demostreu que $S \geq 2T$.

Solució 1. Posem l'origen de coordenades en A, i suposem que $B(c,0)$, $C(0,b)$. L'equació de BC és $bx + cy = bc$, i la de AD és $by = cx$. Tenim en compte que $a^2 = b^2 + c^2$, es calculen sense dificultat les coordenades dels incentres de ABD i ACD

$$\text{Incentre de } ABD: \ O_1\Big(\frac{cb(a+b)}{a(a+b+c)}, \frac{c^2b}{a(a+b+c)}\Big)$$

$$\text{Incentre de } ACD: \ O_2\Big(\frac{b^2c}{a(a+b+c)}, \frac{bc(a+c)}{a(a+b+c)}\Big)$$



que podem escriure-les més reduïdes utilitzant $2p = a + b + c$,

$$O_1\Big(\frac{cb(a+b)}{2ap}, \frac{c^2b}{2ap}\Big),$$
$$O_2\Big(\frac{b^2c}{2ap}, \frac{bc(a+c)}{2ap}\Big).$$

L'equació de la recta que passa per O_1O_2 és $2apy - c^2b = cb(a+b) - 2apx$ i calculant-ne les interseccions amb els eixos de coordenades, s'obté

$$K\Big(\frac{cb}{a}, 0\Big) \qquad L\Big(0, \frac{cb}{a}\Big).$$

Per tant, el triangle AKL és isòsceles (aquest és un resultat que va donar molts maldecaps a més d'un concursant que en va voler donar una justificació per la via de la geometria sintètica).
Llavors, les àrees de AKL i de ABC són, respectivament,

$$T = \frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{a^2} \qquad S = \frac{1}{2}bc.$$

Hem de demostrar que

$$\frac{1}{2}bc \geq \frac{b^2c^2}{a^2} \Longleftrightarrow a^2 \geq 2bc \Longleftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$$

i, aquesta darrera desigualtat evidentment és certa.

Solució 2. Anomenem r_1 i r_2 els radis de les dues circumferències del problema, de centres respectius O_1 i O_2. Com que es pretén comparar les àrees de AKL i ABC, fóra convenient

expressar les longituds de AK i AL en funció de certs elements del triangle ABC. Amb el mateix sistema de referència de la solució anterior, anomenem $h = AD$.
La primera coordenada de O_1 és, evidentment, r_1 i la segona de O_2 és r_2. D'acord amb les notacions de la figura 1, es veu immediatament que la segona coordenada de O_1 és $AE = AF = h - r_1$ i que la primera de O_2 és, per la mateixa raó, $h - r_2$. Així doncs,

$$O_1(r_1, h - r_1), \qquad O_2(h - r_2, r_2).$$

Aleshores el pendent de la recta O_1O_2 és

$$m = \frac{r_2 - (h - r_1)}{h - r_2 - r_1} = -1,$$

per tant els triangles O_2NK i O_1EL són isòsceles i

$$AK = h - r_2 + r_2 = h$$
$$AL = h - r_1 + r_1 = h$$

i AKL és isòsceles, $K(h, 0)$ i $L(0, h)$.
Però de la semblança entre els triangles ACD i ABC deduïm que

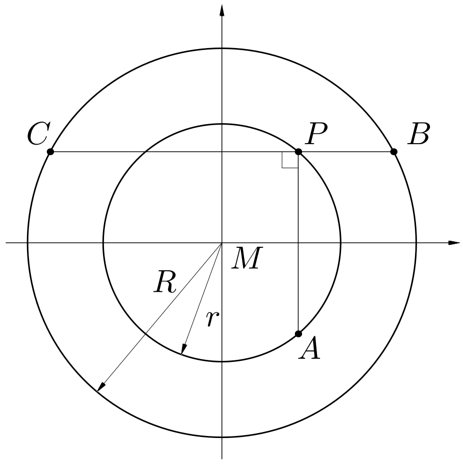
$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{CD}{b} \Longrightarrow h = \frac{cb}{a},$$

I a partir d'aquí es continua com a la solució 1.

Problema 2. *(núm. 1, IMO 1988, proposat per Luxemburg.)* Es consideren dues circumferències coplanàries i concèntriques, de radis R i r $(R > r)$. Sigui P un punt fix de la circumferència petita i B un punt variable de la gran. La recta BP talla un altre cop la circumferència gran en C. La perpendicular l a BP per P torna a tallar la circumferència petita en A (si és tangent a la circumferència en P, llavors $A = P$).
a) Calculeu el conjunt de valors de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.
b) Calculeu el lloc geomètric del punt mitjà de AB.

Solució. Escollim un sistema de referència amb origen en el centre de les dues circumferències, de manera que

$$B(x_2, y),\ P(x_1, y),\ C(-x_2, y),\ A(x_1, -y).$$



Llavors tenim

$$x_1^2 + y^2 = r^2, \qquad x_2^2 + y^2 = R^2,$$

i la suma buscada val

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 4x_2^2 + \left[(x_1 - x_2)^2 + 4y^2\right] + \left[(x_1 + x_2)^2 + 4y^2\right] =$$
$$= 2x_1^2 + 6x_2^2 + 2y^2 + 6y^2 = 2r^2 + 6R^2,$$

que és independent de la posició de B; per tant, l'únic valor que pren la suma en qüestió és $2r^2 + 6R^2$.
Sigui M l'origen i F el punt mitjà de PM. Llavors, $F\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ i el punt mitjà Q de AB té coordenades $Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$.
Aleshores es té que

$$QF^2 = \frac{x_2^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

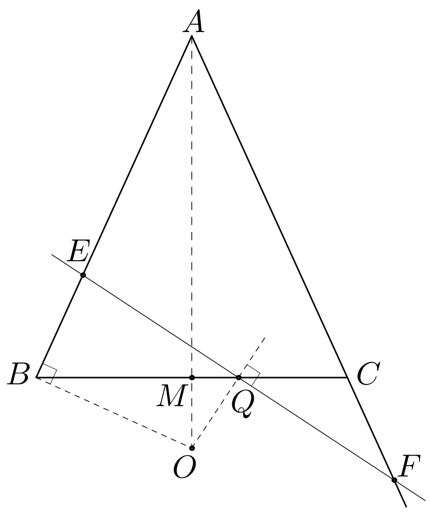
la qual cosa ens diu que el punt mitjà de AB pertany a la circumferència de radi $R/2$, amb centre en el punt mitjà de PM.
Considerant els casos en que M, A i B estan alineats es veu que els punts diametralment oposats d'aquesta circumferència formen part del conjunt de solucions. Per continuïtat s'obté el semicercle complet, i per simetria, el cercle complet.

Problema 3. *(núm. 2, IMO 1994, proposat per Austràlia i Armènia.)* ABC és un triangle isòsceles, amb $AB = AC$, que compleix:
a) M és el punt mitjà de BC, i O és el punt de la recta AM tal que OB és perpendicular al segment AB.

b) Q és un punt qualsevol del segment BC, diferent de B i de C.
c) E és a la recta AB i F a AC, de tal manera que E, Q i F són diferents i estan alineats.
Demostreu que OQ és perpendicular a EF si i només si $QE = QF$.

Solució. Prenem BC com a eix de les x, amb origen M; i suposem que

$$B(-1,0),\ C(1,0),\ A(0,a),\ Q(t,0) \text{ amb } -1 < t < 1.$$



En aquesta referència el punt O té coordenades $(0, -\dfrac{1}{a})$.
L'equació de EF és $y = m(x-t)$, i les coordenades de E i F són

$$E\Big(\frac{a+mt}{m-a}, \frac{am(1+t)}{m-a}\Big), \qquad F\Big(\frac{a+mt}{a+m}, \frac{am(1-t)}{a+m}\Big).$$

L'equació de OQ és

$$\frac{x}{t} - ay = 1,$$

així que la condició de perpendicularitat amb EF serà l'anul·lació del producte escalar dels seus respectius vectors normals $(1, -at)$ i $(m, -1)$. És a dir, $m + at = 0$.
Per altra banda, $QE = QF$ significa que Q és el punt mitjà de EF, que es tradueix en les següents igualtats en coordenades

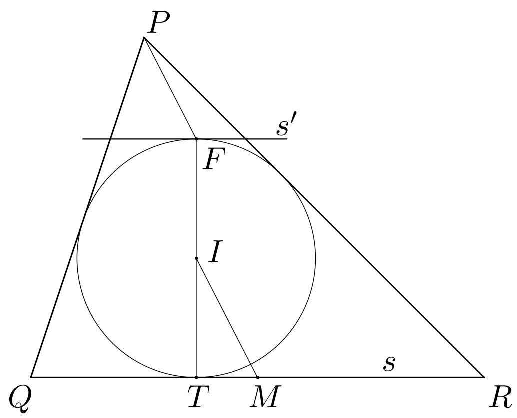
$$a(m+at) = 0, \qquad 2m + 2at = 0,$$

i per ser $a \neq 0$, ambdues equivalen a $m + at = 0$.

L'equivalència de les dues proposicions és evident.

Problema 4. *(núm. 4, IMO 1992, proposat per França.)* En el pla es consideren, una circumferència γ, una recta s tangent a γ, i un punt M de s. Determineu el conjunt dels punts P del pla que tenen la propietat següent: Existeixen dos punts Q i R en s, tals que M és el punt mitjà del segment QR i γ és el cercle inscrit en el triangle PQR.

Solució. Sigui I el centre de la circumferència; escollim el sistema de referència: la recta s com a eix d'abscisses, el punt de tangència T de s i γ com a origen i la recta IT com a eix d'ordenades.



En aquest sistema, $I(0,r)$ és fix; $M(m,0)$ i $F(0,2r)$ també ho són. Per tant, la recta IM, que té pendent $-r/m$, és igualment fixa. L'equació de γ és

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0.$$

Sigui $P(u,v)$ el punt del qual es busca el lloc geomètric; si imposem les condicions del problema i si $Q(q,0)$ i $R(p,0)$, el fet que M hagi de ser el punt mitjà de QR es tradueix en

$$2m = p + q. \tag{1}$$

L'equació de PQ és $vx + (q-u)y = qv$; i la condició de tangència amb γ s'escriu

$$2rq(q-u) = (q+r)(q-r)v; \tag{2}$$

anàlogament, la condició de tangència de PR amb γ és

$$2rp(p-u) = (p+r)(p-r)v. \tag{3}$$

Per tant, el problema rau a eliminar entre (1), (2) i (3) els paràmetres variables p i q. Les igualtats (2) i (3) es poden escriure com

(2')
$$r^2v = q^2(v-2r) + 2rqu$$

(3')
$$r^2v = p^2(v-2r) + 2rpu$$

i igualant i simplificant resulta

$$(q+p)(q-p)(v-2r) = 2ru(p-q),$$

que tenint present (1) es converteix en

$$2m(q-p)(v-2r) = 2ru(p-q);$$

com que P i Q són clarament diferents, $p \neq q$, i la igualtat anterior és equivalent a

$$m(v-2r) = -ru,$$

que és l'equació d'una recta que passa pel punt $(0,2r)$ i té pendent $-r/m$. Les coordenades d'un punt variable sobre la recta són u, v, és a dir, les coordenades de P. En conclusió, P ha d'estar situat en el semiplà determinat per la recta s', paral·lela a s que passa per F i que no conté T; així el lloc geomètric demanat és la semirecta d'origen F paral·lela a IM.

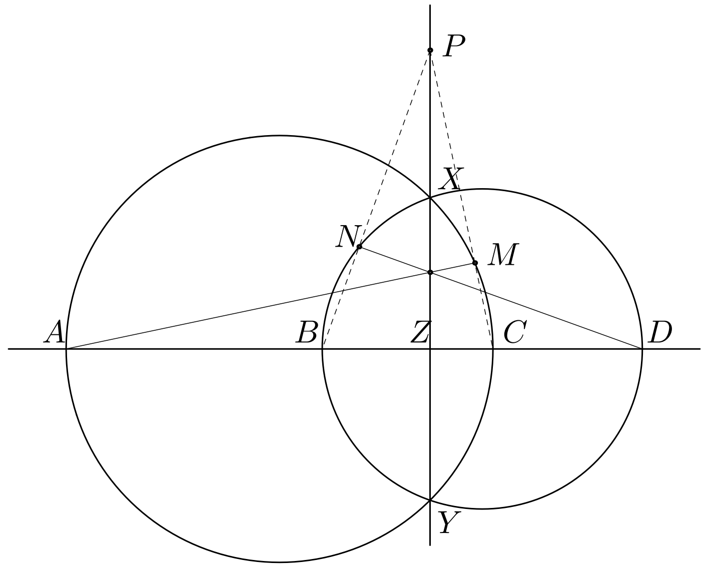
Problema 5. *(núm.1, IMO 1995, proposar per Bulgària.)* Siguin A, B, C i D quatre punts diferents sobre una recta, en aquest ordre. Les circumferències de diàmetres AC i BD es tallen en els punts X i Y. La recta XY talla BC en el punt Z. Sigui P un punt de la recta XY, diferent de Z. La recta CP talla la circumferència de diàmetre AC en els punts C i M, i la recta BP talla la circumferència de diàmetre BD en els punts B i N. Demostreu que les rectes AM, DN i XY són concurrents.

Solució (de Claude Deschamps, cap de la delegació francesa). Prenguem com a eix d'abscisses la recta que conté els quatre punts; com a eix d'ordenades la recta XY, l'origen a Z, i siguin els quatre punts

$$A(a,0),\ B(b,0),\ C(c,0),\ D(d,0).$$

Es compleix la relació

$$ac = bd = p$$



on p és la potència de Z respecte de cada una de les dues circumferències. Llavors l'equació de la circumferència de diàmetre AC és

$$x^2 + y^2 - (a + c)x + p = 0.$$

Sigui $P(0, \lambda)$, amb $\lambda \neq 0$. Les equacions paramètriques de la recta CP són

$$\begin{cases} x = c(1 - t) \\ y = t\lambda \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

i les coordenades de M són

$$t = \frac{c(c - a)}{c^2 + \lambda^2} \Longrightarrow \begin{cases} x = c\dfrac{\lambda^2 + ac}{c^2 + \lambda^2} \\ y = c\lambda\dfrac{c - a}{c^2 + \lambda^2}, \end{cases}$$

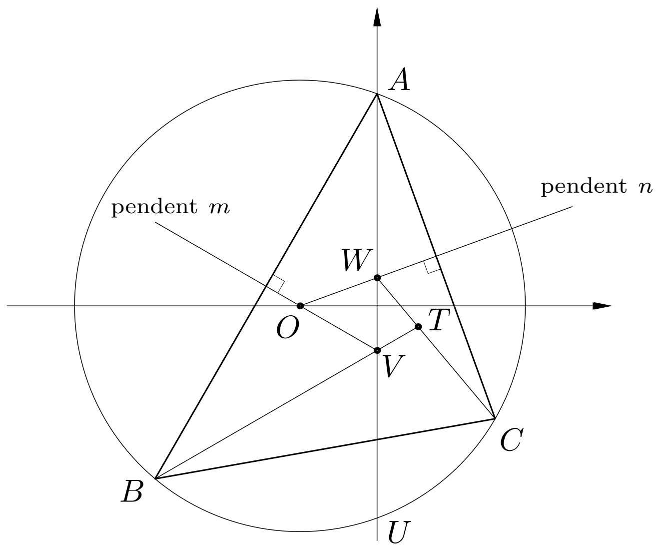
d'on l'equació de AM s'escriu

$$\begin{vmatrix} x & a & c\frac{\lambda^2+ac}{c^2+\lambda^2} \\ y & 0 & c\lambda\frac{c-a}{c^2+\lambda^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La intersecció d'aquesta recta amb l'eix XY s'obté posant $x = 0$, d'on resulta $y = -ac/\lambda$, és a dir, només depèn de p i la concurrència està assegurada.

Problema 6. *(núm. 2, IMO 1997, proposat per Anglaterra.)* L'angle A és el menor dels angles del triangle ABC. Els punts B i C divideixen la circumferència circumscrita del triangle en dos arcs. Sigui U un punt interior de l'arc BC (el que no conté A).
Les mediatrius de AB i AC tallen la recta AU en V i W, respectivament. Les rectes BV i CW es tallen a T.
Demostreu que $AU = TB + TC$.

Solució (dels coordinadors del problema, esquemàtica). Prenem el sistema de referència de tal manera que $A(0,1)$, $U(0,-1)$, $O(-\alpha,0)$, amb $\alpha > 0$, essent O el centre de la circumferència. L'equació d'aquesta és $x^2+y^2+2\alpha x-1=0$.



Equacions de les rectes que intervenen en el problema:

$$\begin{aligned} OV &: y = mx+\alpha, \\ AB &: y = -\frac{1}{m}x+1, \\ OW &: y = n(x+\alpha), \\ AC &: y = -\frac{1}{n}+1. \end{aligned}$$

Coordenades de B : $\left(\dfrac{2m(1-\alpha n)}{m^2+1}, \dfrac{2\alpha m+m^2-1}{m^2+1}\right)$.

Coordenades de C : $\left(\dfrac{2n(1-\alpha n)}{n^2+1}, \dfrac{2\alpha n+n^2-1}{n^2+1}\right)$.

Equació de BV : $y = \dfrac{x\big(m^2-1\big)+2\alpha n^2}{2m}$.

Equació de CW : $y = \dfrac{x\big(n^2-1\big)+2\alpha n^2}{2n}$.

Coordenades de T : $\left(\dfrac{-2\alpha mn}{mn+1}, \dfrac{\alpha(m+n)}{mn+1}\right)$.
Distància BT : $\left|\dfrac{\alpha(m-n)-mn-1}{mn+1}\right|$.
Distància CT : $\left|\dfrac{\alpha(m-n)+mn+1}{mn+1}\right|$.
Sumant adequadament totes dues distàncies i observant que en ser T interior al cercle els sentits de BT i CT són oposats, resulta $BT + CT = 2$.

Problema 7. *(núm. 1, IMO 1998, proposat per Luxemburg.)* En el quadrilàter convex $ABCD$, les diagonals AC i BD són perpendiculars i els costats oposats AB i CD no són paral·lels. Suposem que P, punt d'intersecció de les mediatrius de AB i DC, és interior al quadrilàter. Demostreu que $ABCD$ és cíclic (inscriptible) si i només si ABP i CDP tenen la mateixa àrea.

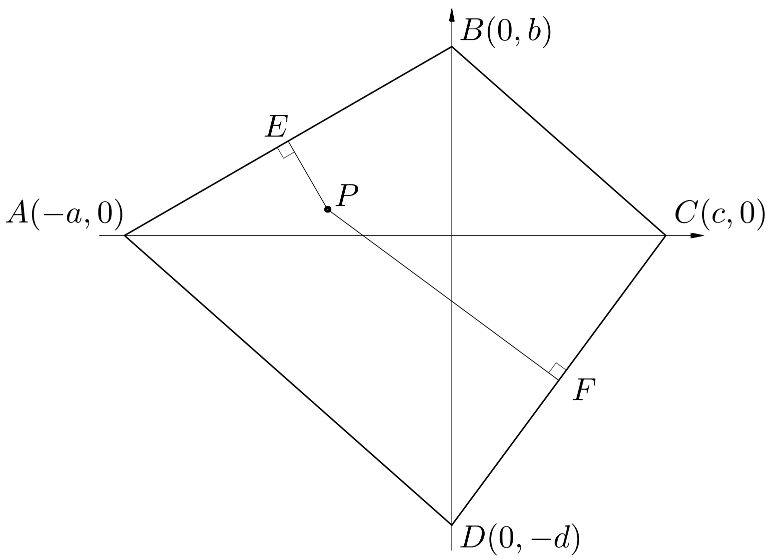
Solució (una de les oficials). Prenem com a referència les diagonals perpendiculars; suposem que

$$A(-a,0),\ B(0,b),\ C(c,0),\ D(0,-d)$$

amb a, b, c, d estrictament positius. Siguin E i F els punts mitjans de AB i DC, respectivament,

$$E\Big(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}\Big), \qquad F\Big(\frac{c}{2},-\frac{d}{2}\Big);$$

els pendents de les rectes AB i DC són b/a i d/c, d'on les equacions de les mediatrius dels segments corresponents són:



Mediatriu de AB : $2(ax+by)=b^2-a^2$,
Mediatriu de DC : $2(cx+dy)=c^2-d^2$.
Llavors, resolent el sistema format per les dues equacions anteriors, obtenim les coordenades del punt d'intersecció $P(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{d\big(b^2-a^2\big)-b\big(c^2-d^2\big)}{2(ad-bc)}, \\ y_0 &= \frac{a\big(c^2-d^2\big)-c\big(b^2-a^2\big)}{2(ad-bc)}. \end{aligned}$$

Com que els triangles PBA i PDC tenen la mateixa orientació, la igualtat d'àrees s'escriu (mitjançant determinants, per exemple)

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ 0 & -d & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

que es transforma en

$$(b+d)x_0-(a+c)y_0=cd-ab$$

i substituint els valors de x_0 i y_0 i fent operacions resulta finalment

$$(ac-bd)\big[(a+c)^2+(b+d)^2\big]=0$$

així que les àrees són iguals si i només si $ac=bd$, que és precisament la condició perquè $ABCD$ sigui cíclic.

Problema 8. *(núm. 5, IMO 1998, proposat per Ucraïna.)* Sigui I l'incentre del triangle ABC. La circumferència inscrita és tangent a BC, CA i AB en K, L i M, respectivament. La paral·lela per B a MK talla LM i LK en R i S, respectivament. Demostreu que $\widehat{RIS}$ és un angle agut.

Solució (de Mircea Becheanu, cap de la Delegació de Romania). Observem en primer lloc que la condició de l'enunciat es pot escriure com

$$\widehat{RIS} \text{ agut} \iff RI^2+IS^2-RS^2>0$$

pel teorema del cosinus en el triangle RIS. Però com que $RS=RB+BS$, la desigualtat anterior equival a

$$IR^2+IS^2-RB^2-SB^2-2RB\cdot SB>0.$$

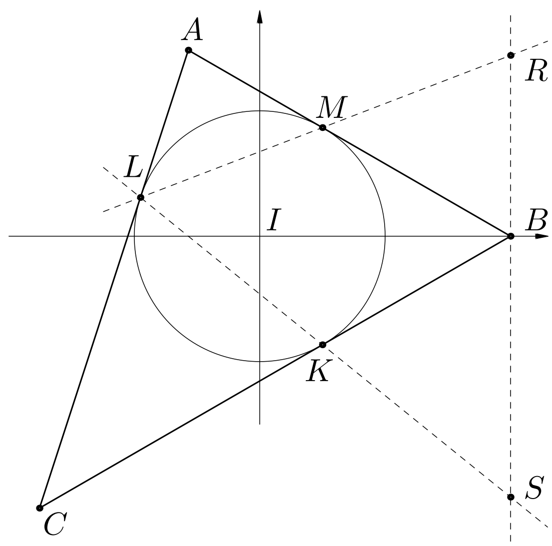
Com que BI és perpendicular a KM, resulta que BI és perpendicular a RS i d'aquí que

$$IR^2 - RB^2 = IB^2, \qquad IS^2 - BS^2 = IB^2,$$

per tant,

$$\widehat{RIS} \text{ agut} \Longleftrightarrow IB^2 > RB \cdot SB.$$

Passem, ara, a demostrar la proposició del problema utilitzant coordenades.



Considerem el cercle inscrit amb centre en l'origen $I(0,0)$, i radi 1, i un sistema de coordenades en el qual $M(a,b)$ i $K(a,-b)$ pertanyin al cercle. Llavors $a^2+b^2=1$.
Les equacions de les tangents al cercle en M i en K són, respectivament,

$$xa + yb = 1, \tag{1}$$

$$xa - yb = 1. \tag{2}$$

La intersecció de (1) amb OX dóna el punt $B(1/a, 0)$. Sigui $L(a_1, b_1)$ un punt arbitrari del cercle, $a_1^2 + b_1^2 = 1$.
L'equació de la recta LM és

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

fent $x = 1/a$ es calcula l'ordenada de R

$$y_R = \frac{1}{(a-a_1)}\Big[\frac{1}{a}(b-b_1) + (ab_1 - a_1 b)\Big].$$

Anàlogament, fent $x = 1/a$ en l'equació de LK es calcula l'ordenada de S

$$y_S = \frac{1}{(a-a_1)}\Big[\frac{1}{a}(b-b_1) + (ab_1 + a_1 b)\Big].$$

Per l'observació inicial, hem de demostrar que $IB^2 > RB \cdot SB$, és a dir, que

(3) $$\frac{1}{a^2} > |y_R \cdot y_S|$$

i això s'escriu com

$$\frac{1}{a^2} > \frac{b^2}{a^2(a-a_1)^2}\big|(1-aa_1)^2 - b^2 b_1^2\big|$$

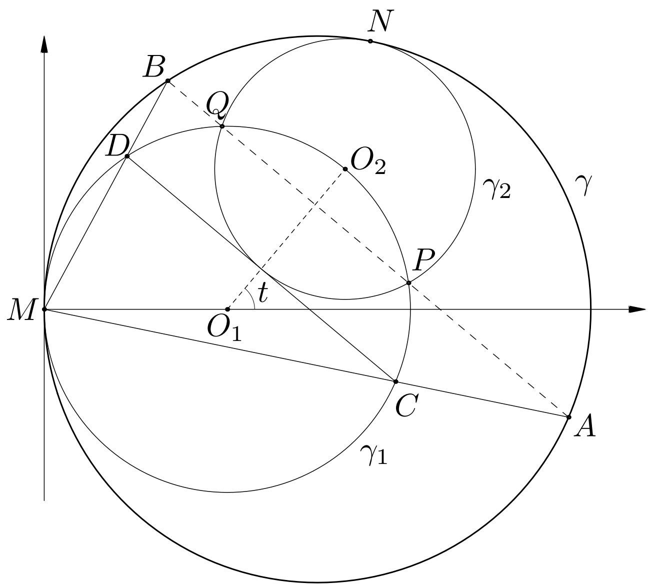
és a dir,

$$(a-a_1)^2 > b^2\Big|(1-aa_1)^2 - \big(1-a^2\big)\big(1-a_1^2\big)\Big|$$
$$(a-a_1)^2 > b^2\big|1 - 2aa_1 + a^2a_1^2 - 1 + a^2 + a_1^2 - a^2a_1^2\big|$$
$$(a-a_1)^2 > b^2(a-a_1)^2$$

que és tant com dir $1 > b^2$, que efectivament és certa.

Problema 9. *(núm. 5, IMO 1999, proposat per Rússia.)* Dues circumferències γ_1 i γ_2, estan contingudes en l'interior de la circumferència γ, i són tangents a γ en M i N, respectivament. γ_1 passa pel centre de γ_2. La recta que passa pels dos punts d'intersecció de γ_1 i γ_2 talla γ en A i B. MA i MB tallen γ_1 en C i D, respectivament. Demostreu que CD és tangent a γ_2.

Solució. Prenem com a origen de coordenades el punt M, eix d'abscisses MO_1, i eix d'ordenades la tangent a γ en M.



Les coordenades de O_1 són $(r_1, 0)$, i l'equació de γ_1 és $(x-r_1)^2+y^2 = r_1^2$; les coordenades de O_2 són, anomenant $t = \widehat{OO_1O_2}$, $(r_1 + r_1 \cos t, r_1 \sin t)$, així que l'equació de γ_2 serà $(x - r_1 - r_1 \cos t)^2 + (y - r_1 \sin t)^2 = r_2^2$.
L'equació de AB és la de l'eix radical de γ_1 i γ_2, que obtenim restant les equacions de les dues circumferències

$$2xr_1 \cos t + 2yr_1 \sin t = 2r_1^2 - r_2^2 + 2r_1^2 \cos t.$$

L'homotècia de centre en M que transforma γ en γ_1 té raó r/r_1; per tant, l'equació de CD, transformada de AB per aquesta homotècia, s'obtindrà simplement multiplicant el coeficient de x i el de y per la raó

$$2rx \cos t + 2ry \sin t = 2r_1^2 - r_2^2 + 2r_1^2 \cos t.$$

Ara bé, el teorema del cosinus en el triangle OO_1O_2 permet escriure

$$\cos t = \frac{O_1O^2 + O_1O_2^2 - OO_2^2}{2OO_1 \cdot O_1O_2} = \frac{2r_1^2 - 2rr_1 + 2rr_2 - r_2^2}{2(r - r_1)r_1}$$

i llavors la distància de O_2 a la recta CD es calcula en funció dels radis

$$\mathrm{d}\,(O_2, CD) = \frac{1}{2r}\left|\left(2rr_1 - 2r_1^2\right) \cos t + 2rr_1 - 2r_1^2 + r_2^2\right| = \frac{1}{2r}\,|2rr_2| = r_2$$

d'on, efectivament, CD és tangent a γ_2.

Problema 10. *(núm. 3, 36 OME, 2000.)* Dues circumferències fixes γ_1 i γ_2 es tallen en els punts A i B. Una recta variable que passa per B talla novament la primera circumferència en P_r i la segona en Q_r. Demostreu que les mediatrius dels segments P_rQ_r passen per un punt fix.

Solució. Prendrem com a eix d'abscisses la recta que uneix els centres de les dues circumferències, i com a eix d'ordenades, la recta AB (que és l'eix radical de les dues). Llavors les equacions de les circumferències i dels punts rellevants en el problema són

$$\begin{gathered} A(a, 0), \qquad B(0, -a) \\ \gamma_1 :\ (x - p)^2 + y^2 = r_1^2 \\ \gamma_2 :\ (x - q)^2 + y^2 = r_2^2 \end{gathered}$$

i l'equació de la recta variable per B és $y + a = mx$.

Les relacions entre a, p, q i els radis són

$$p^2 + a^2 = r_1^2, \qquad q^2 + a^2 = r_2^2.$$

Les coordenades de P_r i Q_r són

$$\begin{aligned} P_r: &\ \Big(\frac{2(p+ma)}{1+m^2}, \frac{2mp + a\big(m^2-1\big)}{1+m^2}\Big), \\ Q_r: &\ \Big(\frac{2(q+ma)}{1+m^2}, \frac{2mq + a\big(m^2-1\big)}{1+m^2}\Big). \end{aligned}$$

D'aquí s'obté l'equació de la mediatriu de P_rQ_r

$$y - \frac{m(p+q) + a\big(m^2-1\big)}{1+m^2} = -\frac{1}{m}\Big(x - \frac{p+q+2ma}{1+m^2}\Big)$$

que es transforma, en fer operacions, en

$$\big(m^2+1\big)(p+q) + am\big(m^2+1\big) - m\big(1+m^2\big)y - \big(1+m^2\big)x = 0,$$

és a dir, en

$$(p+q-x) + m(a-y) = 0$$

i aquest feix de rectes dependents del paràmetre m, passa pel punt d'intersecció de les rectes $x = p+q$, $y = a$ i aquest punt $M(p+q, a)$ és fix, ja que p, q, a depenen dels radis de les dues circumferències.

Problemes

(Per a resoldre amb geometria analítica.)

GA1. *(núm. 5, IMO 1959, proposat per Romania.)* S'escull un punt arbitrari M a l'interior d'un segment AB. Els quadrats $AMCD$ i $MBEF$ es construeixen al mateix costat de AB, sent AM i MB les bases respectives. Els cercles circumscrits a aquests quadrats, de centres P i Q, es tallen en M i en un altre punt N. Sigui N' el punt d'intersecció de les rectes AF i BC.

a) Proveu que N i N' coincideixen.

b) Proveu que les rectes MN passen per un fix S, independent de l'elecció de M.

c) Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans dels segments PQ quan M varia entre A i B.

GA2. *(núm. 6, IMO 1961, proposat per Romania.)* Es considera un pla π i tres punts no alineats A, B, C a un mateix costat de π; suposem que el pla determinat pels tres punts no és paral·lel a π. Al pla π es prenen tres punts arbitraris A', B', C'. Siguin L, M, N els punts mitjans dels segments AA', BB' i CC'. Sigui G el baricentre del triangle LMN. (No es consideren posicions de A', B', C' tals que L, M i N no formin triangle). Quin és el lloc geomètric de G quan A', B', C' varien independentment sobre π?

GA3. *(núm. 1, IMO 1997, proposat per Holanda.)* Es construeixen, a l'interior del quadrat $ABCD$, els triangles equilàters ABK, BCL, CDM i DAN. Demostreu que els punts mitjans dels quatre segments KL, LM, MN, NK, i els punts mitjans dels vuit segments AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN, són els vèrtexs d'un dodecàgon regular.

GA4. *(núm. 2, IMO 1978, proposat pels Estats Units.)* Sigui P un punt donat a l'interior d'una esfera donada. Tres raigs mútuament perpendiculars que surten de P tallen l'esfera en els punts U, V i W; el punt Q és el vèrtex diagonalment oposat a P en el paral·lelepípede determinat per PU, PV i PW. Trobeu el lloc geomètric de Q per totes les ternes de raigs mútuament perpendiculars i d'origen P.

GA5. *(Olimpíada del Canadà, 1994.)* El triangle ABC és acutangle. Sigui AD l'altura des de A, i H un punt qualsevol interior a AD. La recta BH talla el segment AC al punt E i la recta CH talla el segment AB al punt F. Demostreu que $\widehat{EDH} = \widehat{HDF}$.

GA6. *(Olimpíada Matemàtica Espanyola, 1995.)* Al triangle ABC, rectangle a A, els punts M i N són els peus de les bisectrius interiors dels angles B i C, respectivament; i D és el peu de l'altura des de A. Si O és el punt d'intersecció de AD i MN, demostreu que $AO = r$, el radi del cercle inscrit a ABC.

Alguns comentaris finals

1.- El problema 2 havia estat proposat a la revista suïssa *Elemente der Mathematik*, vol 2, n 3, 1947, p 68, per E. Voellmy. Entre les cinc persones que el van resoldre en aquella època, hi havia el veterà Cap de la Delegació de Luxemburg a la IMO d'Austràlia. Realment, era molt improbable que entre els membres del Jurat presents a Austràlia, n'hi hagués cap que recordés un problema publicat 40 anys abans en una revista en llengua alemanya.

2.- Potser ens sorprengui que un problema sigui proposat per dos països, com el cas del problema 3. En realitat, cada país havia proposat només una meitat de la doble implicació de l'enunciat. El Comitè de problemes de Hong Kong (on es va celebrar la IMO de 1994), presidit per Andy Liu, va refondre els dos enunciats en un de sol.

3.- Del problema 6, original del britànic Chistopher Bradley, no se'n va conèixer cap solució analítica fins que l'equip de coordinadors d'aquest problema a Mar del Plata, que comandava Angelo Barone Netto, del Brasil, la va fer conèixer als Caps de Delegació. Es va sospitar que algun concursant intentaria fer-lo d'aquesta forma, i van decidir d'arribar fins al final, per tal de poder adjudicar punts a les solucions analítiques parcials.

4.- La solució del problema 8 és similar a l'obtinguda durant la IMO 1998 a Taiwan per Jaime Vinuesa del Río, que aconseguí una medalla de bronze.

5.- El problema 9 admet solucions sintètiques molt boniques; si s'intenta trobar les coordenades dels quatre punts A, B, C i D, els càlculs es compliquen en excés.

6.- El problema 10 va ser un dels que van marcar diferències a la fase nacional de l'Olimpíada Matemàtica Espanyola de 2000, celebrada a Palma de Mallorca; altres sistemes de referència elegits condueixen a situacions més complicades.

7.- En el problema GA5, proposat sense solució, si H és l'ortocentre s'obté un resultat conegut (temo que per poca gent): les altures d'un triangle acutangle són les bisectrius del triangle òrtic.

PROBLEMES DIVERSOS

Francisco Bellot Rosado

En aquest capítol es recull un conjunt relativament heterogeni de problemes. Alguns d'ells han estat proposats a les Olimpíades Internacionals (IMO) i podrien encaixar dins d'un grup de "problemes de difícil classificació", bé perquè a la solució hi intervenen tècniques mixtes, bé perquè, en aparièncía, a la solució no hi ha un substrat teòric suficientment elemental que pugui exposar-se prèviament a estudiants de Batxillerat. D'altres problemes no van ser seleccionats per a la prova de la IMO, encara que tenien, en la meva opinió, mèrits semblants o fins i tot més grans per a haver estat elegits. En algunes ocasions s'inclouen comentaris que, tal vegada, il·lustren el context de l'elecció d'un problema per part d'un Jurat format per 80 persones de diferents països.
Crec que tots tenen un elevat nivell de dificultat; això no ens hauria d'estranyar ja que els problemes de l'Olimpíada Internacional són, en general, molt difícils.

El primer exemple és original de Ioan Tomescu, es va publicar (sense solució) a la revista romanesa *Gazeta Matematica* el 1991 i la solució que presentem és d'Álvaro Begué Aguado, medalla de bronze a la IMO de 1993.

Problema 1. Es considera un conjunt M de n persones, tal que:
a) Tota persona de M coneix altres k persones de M.
b) Tot parell de persones de M que es coneixen, coneixen h persones de M.
c) Tot parell de persones de M que no es coneixen, tenen exactament m coneguts comuns a M.
Demostreu que $m\,(n-k) - k\,(k-h) + k - m = 0$.

Solució. Suposem que si A coneix B, llavors B coneix A.
Associarem un graf al problema de la manera següent: cada persona és un vèrtex; dos

vèrtexs units per una aresta representarà a dues persones que es coneixen. A l'estructura formada per tres vèrtexs units per *dues* arestes l'anomenarem *quasi triangle.* Anem a comptar de dues maneres diferents el nombre de quasi triangles del graf associat al problema.

El nombre de vèrtexs és n; el grau de cada vèrtex es k; el nombre d'arestes és $nk/2$; i el nombre de *no arestes* és

$$\frac{n\,(n-1)-nk}{2}=\frac{n\,(n-k-1)}{2}.$$

El nombre de quasi triangles que contenen una certa aresta és $2\,(k-h-1)$, de manera que de quasi triangles n'hi haurà

$$\frac{nk\,(k-h-1)}{2}. \tag{1}$$

D'altra banda, el nombre de parells de punts no units per una aresta és

$$\frac{n\,(n-k-1)}{2};$$

el nombre de quasi triangles que contenen una certa no aresta es m, i per tant hi ha

$$\frac{mn\,(n-k-1)}{2} \tag{2}$$

quasi triangles.

Escrivint $(1)=(2)$ i fent operacions s'obté precisament la igualtat de l'enunciat.

L'exemple següent va ser proposat al Torneig Internacional de les Ciutats de 1986 (diguem de passada, per als alumnes més joves).

Problema 2. *(El mite de Sísif)*

Hi ha 1001 graons, amb roques en alguns d'ells (no més d'una a cada graó). Sísif ha d'agafar una roca i pujar-la, un o més graons, fins el primer graó que trobi buit. Aleshores Hades, el seu oponent, agafa una roca i la baixa un graó, sempre que aquest estigui buit. Inicialment hi ha 500 roques als primers 500 graons. Sísif i Hades mouen les roques alternativament, i Sísif fa el moviment inicial.

Sísif ha de col·locar una roca a l'últim graó. Ho pot impedir Hades?

Solució (oficial). Sí, pot impedir-ho. Sempre que Sísif creï una vacant movent una roca, el graó de dalt d'aquesta vacant ha d'estar ocupat. Si no estava ocupat abans, Sísif ha de traslladar allà la seva roca. Per tant, Hades sempre pot omplir aquesta vacant immediatament, baixant la roca del graó superior. Demostrarem que aquesta estratègia basta per a impedir que Sísif aconsegueixi el seu objectiu.

Observem que el primer graó està inicialment ocupat; l'estratègia d'Hades garanteix que sempre estarà ocupat després que Hades mogui. Ademés, inicialment no existeixen dues vacants adjacents per sota de la roca més alta. Per tal que Sísif pugui crear aquestes dues vacants, la inferior ha d'existir prèviament. Però, tan bon punt hagi creat la superior, Hades la ocupa. Per la forma que mou Hades, mai crearà dues vacants adjacents per sota de la roca més alta. Perquè això passi, la vacant superior ha d'existir prèviament, de manera que la roca en el següent graó per sota no hagi estat moguda allà. Si existís una vacant per sota d'aquest graó, no ha estat creada immediatament abans. Per tant Hades no mourà la roca en qüestió. Es dedueix d'això que sempre que sigui el torn de Sísif, el primer graó estarà ocupat i no existeixen dues vacants adjacents per sota de la roca més alta. Per tant, aquesta no pot pujar més enllà del graó 999, així que Sísif no pot situar la roca al 1001.

L'exemple següent resultà polèmic: fou proposat el 1992 a la Olimpíada de la Comunitat d'Estats Independents, i el cas particular amb $m = n$ fou proposat per Finlàndia l'any següent a la IMO d'Estambul, on va ser elegit i es va convertir en el més difícil del primer dia. Ningú no va dir res; el cas es va descobrir al final, perquè la solució havia estat publicada a la revista russa *Kvant*. La sessió del Jurat Internacional de la IMO on es va mostrar la pàgina de *Kvant* amb el problema va ser molt desagradable. Però el problema és molt bonic, i la solució és elemental, de gran brillantor.

Problema 3. *(Olimpíada de la Comunitat d'Estats Independents, 1992.)* En un escaquer hi ha fitxes, formant un rectangle de dimensions $m \times n$, $m \geq 2, n \geq 2$. El tauler és infinit, en totes direccions. Només hi ha un tipus de moviment permès: una fitxa salta sobre una altra fitxa situada en una casella contigua, anant a parar a una casella que estigui buida, i es menja la fitxa sobre la que salta. Això es pot fer horitzontalment o verticalment, però no en diagonal.

Quin és el menor nombre de fitxes que pot quedar a l'escaquer?

Solució. Podem pensar en els casos que m i n no són excessivament grans, ja que sempre serà més fàcil que si comencem amb un rectangle 1537×2000 ...

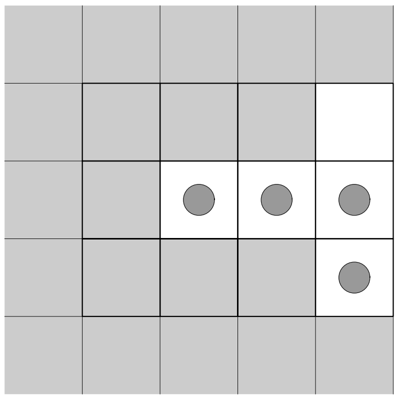
Si el rectangle té dimensions 2×1, l'anàlisi acaba aviat: només queda una fitxa al tauler.

Si és 3×1, queden dues fitxes, ja que inicialment solament es pot moure la central, menjant-se una de les altres dues, i les que queden després estan massa separades per a continuar el joc.

El cas 2×2 es redueix fàcilment al 2×1 (queda una fitxa), i el 3×2 es redueix al 3×1 (queden dues fitxes).

De seguida es comprèn que l'estratègia que utilitzem en casos més complexos ha de ser tal que mantingui les fitxes el més agrupades possible. La seqüència de moviments que veurem a continuació ens permetrà, no solament això, sinó també eliminar files completes de les fitxes del rectangle.

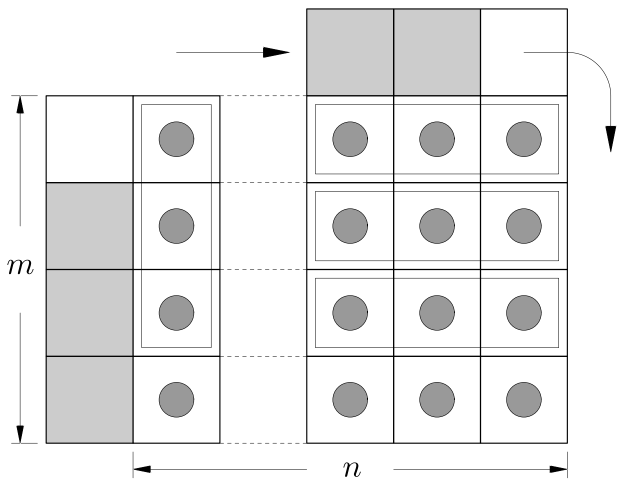
Si en alguna part del rectangle hi ha quatre fitxes en la posició de la figura



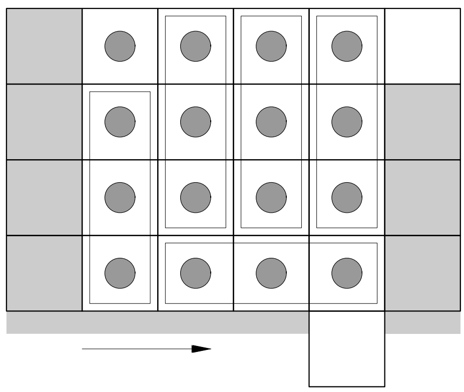
es fàcil trobar una sèrie de moviments permesos per mitjà dels quals s'eliminen les tres fitxes horizontals i la quarta es queda, al final, en la mateixa posició que té al principi. (Els alumnes troben aquesta sèrie de seguida).

Veurem a continuació com eliminar files completes de tres en tres, utilitzant aquest procediment. Considerem el rectangle $m \times n$, representat a la figura (hi ha punts suspensius per a indicar les columnes intermèdies)

Començant per la columna de l'esquerra, anem eliminant grups de tres fitxes, en columna, d'esquerra a dreta, fins que quedin les tres últimes columnes de la dreta; i les últimes 9 fitxes s'eliminen en grups de tres fitxes horitzontals, de dalt a baix.



Així podem eliminar les tres files completes, passant, per tant, d'un rectangle $m \times n$ a un rectangle $(m-3) \times n$.
Naturalment, el que hem dit arran de les files ho podríem repetir per a les columnes. Això significa que per mitjà del procediment anterior bastarà considerar només valors petits de m i n.
A més a més dels que ja hem vist al principi, és instructiu veure com en el cas 4×4 es pot aconseguir que quedi una única fitxa al tauler; la següent figura mostra com fer-ho:



Deixarem la fitxa de la cantonada superior esquerra, eliminant les altres així: primer les tres fitxes que té per sota (en vertical); després les tres fitxes horitzontals de la fila inferior; i després, de dreta a esquerra, les que estan en grups de tres, verticals.
En aquest punt, ens podem preguntar, quan quedaran dues fitxes i quan en quedarà només una. Com que les files (o columnes) del rectangle es van eliminant de tres en tres, la resposta del problema sembla ser

DUES, si el producte mn es múltiple de tres; UNA, en cas contrari

No obstant, el problema no està encara completament resolt; és clar que la nostra estratègia funciona bé quan queda una sola fitxa al tauler (no en poden quedar menys); però hem de demostrar que en els altres casos (quan el producte es múltiple de tres), no poden quedar menys de dues fitxes.
Analitzarem els casos 4×3 i 5×3. Abans de començar el joc, acolorim les caselles de l'escaquer amb tres colors, A,B i C, tal com indica la figura (que només representa el rectangle 4×3, però se suposa que totes les caselles del tauler estan acolorides de la mateixa manera):

A	**B**	**C**	**A**
B	**C**	**A**	**B**
C	**A**	**B**	**C**

Com es pot observar, les caselles del mateix color estan en diagonals. Posem ara les fitxes al rectangle 4×3. Abans de començar a jugar, hi ha quatre fitxes a les caselles de color A, quatre a les de color B i quatre a les de color C. Anem a veure quin és l'efecte del moviment del joc sobre el nombre de fitxes que hi ha a les caselles de cada color. Per fixar idees, suposem que la fitxa situada a la casella de color A, del vèrtex superior dret, és menjada per la de la seva esquerra, que era a la casella de color C, i que en saltar sobre ella ocupa una casella de color B (no representada a la figura). Fent aquest moviment, hi ha tres fitxes a les caselles de color A, cinc a les de color B i tres a les de color C.
En altres paraules, el nombre de fitxes a les caselles d'un color augmenta en 1, i el nombre de fitxes a les caselles dels altres dos colors disminueix en 1. Inicialment, els nombres de fitxes a les caselles de cada color eren *parells*, i després del moviment del joc són *senars*. Si el rectangle fos 5×3, la situació s'invertiria: abans de jugar, el nombre de fitxes a les caselles de cada color és *senar*, i després del moviment del joc, és *parell*.
Aquesta situació pot expressar-se dient que, en aquest joc, és *invariant* la igualtat de les paritats del nombre de fitxes que hi ha a les caselles de cada color.
Doncs bé, això és suficient per a garantir que, en el cas que ens ocupa (mn es múltiple de 3), *no poden quedar menys de dues fitxes*. Perquè si passés això, quedaria una sola fitxa

al tauler, és a dir, cap fitxa a les caselles de dos dels colors, i una a la casella del tercer color. Però els nombres 0, 1, 0 no tenen la mateixa paritat, i per tant és impossible arribar a aquesta situació.

El quart exemple és un problema que havia de ser proposat a la IMO de 1991, a Sigtuna (Suècia). El va presentar Bulgària, y, tal com va dir el representant del Brasil, és igualment difícil per un estudiant xinès que per un de Trinidad-Tobago.
Malgrat tot, no va ser elegit. Presentem la solució obtinguda per Daniel Lasaosa Medarde l'estiu de 1991, durant la preparació de l'Olimpíada Iberoamericana d'aquell any. (La solució oficial figura publicada a [1]).

Problema 4. Dos estudiants, A i B, juguen de la següent manera: cada un d'ells escriu en un paper un nombre enter positiu i el dóna a l'àrbitre. Aquest, escriu a la pissarra dos enters, un dels quals és la suma dels nombres escrits pels dos jugadors. L'àrbitre pregunta a l'estudiant A: *Pots saber el nombre escrit per l'altre jugador?*. Si A contesta "No", l'àrbitre fa la mateixa pregunta al jugador B. Si B contesta "No", torna a fer-li la pregunta a A, etc.
Se suposa que A i B són intel·ligents i diuen la veritat.
Demostreu que, en un nombre finit d'etapes, algun dels estudiants contesta "Sí".

Solució. A coneix el seu nombre a, i B el seu b. A més a més, tots dos coneixen els nombres donats per l'àrbitre (c, d on suposarem $c < d$). Podem menysprear el cas $c = d$, ja que guanyaria directament A, ja que

$$b + a = c = d \implies b = c - a = d - a.$$

• A només pot estar segur de conèixer la suma si $a \geq c$; en aquest cas, $a + b > c$, i com que $a + b = c$ o $a + b = d$, deduïm que $a + b = d$ d'on $b = d - a$.
• En el cas que A no conegui la suma, B sap que $c > a$ (si no, A hauria guanyat). Per tant $a + b < c + b$; si $d \geq c + b$, $d > a + b$, d'on $a + b = c$, $a = c - b$ i guanyaria B.
• Si B no guanya, A ja sap que $c + b > d$, per tant $b > d - c$; $a + b > a + d - c$; si $a + d - c \geq c$, A guanya ja que $a + b > c$, $a + b = d$. Si no, B ja sap que $a + d - c < c$, $a < 2c - d$, $a + b < 2c - d + b = c + b - (d - c)$; si $d \geq c + b - (d - c)$, $a + b < d, a + b = c$ i B guanya, etc.
Les fites obtingudes per A han estat $a \geq c$, $a \geq 2c - d = c - (d - c)$.

Les obtingudes per B han estat $d-c \geq b, 2(d-c) \geq b$.
Vegem que les fites de A són de la forma $a \geq c - n(d-c)$ i les de B, $n(d-c) \geq b$.
Sigui K una fita de A, $a \geq K$. Si A no encerta, B sap que $a < K$, d'on $a+b < K+b$; si $d \geq K+b$, llavors $a+b < d$ i B guanya. Si no, A sap que $K+b > d$, $b > d-K$, $a+b > d-K+a$; si $d-K+a \geq c$, $a+b > c$, i A guanya. La nova fita ha estat

$$a \geq K + c - d = K - (d-c).$$

Això val per a tot K, de manera que les successives fites de A són

$$c,\ c-(d-c),\ c-2(d-c),\ \ldots c-n(d-c).$$

El mateix tipus de raonament permet obtenir les fites de B

$$d-c,\ 2(d-c),\ 3(d-c), \ldots$$

De $a \geq c - n(d-c)$ obtenim $n \geq \frac{c-a}{d-c}$; aleshores si prenem $n = \left[\frac{c-a}{d-c}\right] + 1$ segur que es complirà l'anterior desigualtat; per tant si A o B no han guanyat abans, A guanya ara; és en el torn $\left(\left[\frac{c-a}{d-c}\right]+1\right)$-èsim de A.
Finalment, observem que en guanyar, A descobreix que $a+b=d$. Si guanya B, descobreix que $a+b=c$. Per tant, si l'àrbitre elegeix el segon nombre més gran que la suma, guanya B; i si no, guanya A.

El següent exemple fou presentat per Bulgària en la IMO de 1985, però no resultà elegit. És un cas lleugerament més general d'altres problemes similars.

Problema 5. Siguin a i b nombres enters, i n un enter positiu. Demostreu que

$$\frac{b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\cdots\big(a+(n-1)b\big)}{n!}$$

és un nombre enter.

Solució (oficial). És ben conegut que si $p < n$ es primer, l'exponent més gran α tal que p^α divideix $n!$ és

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

Aquesta suma (finita, ja que si $p^x > n$ els sumands són nuls) és menor o igual que

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots$$

i aquesta suma és menor o igual que n. Per tant, ha de ser

$$n - 1 \geq \alpha.$$

Si p divideix b, aleshores es pot simplificar p del quocient. Si p no divideix b, aleshores ha de dividir un dels factors

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \ldots,\ a+(p-1)b.$$

En total hi haurà al menys $[n/p]$ factors divisibles per p. De la mateixa manera, hi haurà al menys $[n/p^2]$ factors divisibles per p^2, i així successivament. En total, el producte

$$a(a+b)(a+2b)\cdots\bigl(a+(n-1)b\bigr)$$

té p com a factor al menys α vegades, i hem acabat.

Els dos exemples següents són d'equacions funcionals. El primer va ser, probablement, un dels més difícils de l'Olimpíada de 1996 de Bombay. No s'havia proposat mai en la IMO una equació funcional amb domini en els enters que admetés a més de les solucions trivials, una família infinita de solucions, gens fàcil de construir.

Problema 6. *(Proposat per Romania.)* Sobre el conjunt dels enters més grans o iguals que zero, es demana que determineu totes les funcions f d'aquest conjunt en ell mateix, tals que

$$f\bigl(m + f(n)\bigr) = f\bigl(f(m)\bigr) + f(n),$$

qualssevol que siguin els elements m, n de l'esmentat conjunt. (Problema original de Mircea Becheanu).

Solució (de l'autor). Designem per $\mathbb{N}$ el conjunt dels enters més grans o iguals que zero. En primer lloc provem alguns valors particulars de les variables:
Si $m = n = 0$, aleshores $f(0) = 0$.
Si $m = 0$, aleshores $f\bigl(f(n)\bigr) = f(n)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ (*).

Per tant, passant aquest resultat a l'equació funcional, aquesta es pot escriure en la forma

$$f\big(m+f(n)\big)=f(m)+f(n), \quad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

La funció nul·la és una solució de l'equació. Suposem que f no és la funció nul·la. Aleshores té punts fixos no nuls, ja que es compleix (*). Sigui $P\subset\mathbb{N}$ el conjunt dels punts fixos no nuls de la funció. És evident que $P\cup\{0\}=f(\mathbb{N})$. Sigui a el menor punt fix no nul. Si $a=1$, aleshores $f(2)=2$ i es comprova per inducció que $f(n)=n$, qualsevol que sigui n. Suposem ara que $a>1$. Per inducció es demostra que $f(ka)=ka$, $\forall k\geq 1$. D'aquí surt que

$$a\mathbb{N}\ \subset P\cup\{0\}\,.$$

Anem a demostrar que $a\mathbb{N}=P\cup\{0\}$. Observem primer que la suma de dos punts fixos es un punt fix. Sigui b un punt fix arbitrari. D'acord amb la divisió entera

$$b=aq+r, \quad 0\leq r<a.$$

tenim

$$b=f(b)=f(aq+r)=f\big(r+f(aq)\big)=f(r)+f(aq)=f(r)+aq.$$

Resulta que $f(r)=r$, i per tal que $r<a$, ha de ser $r=0$. En conclusió, $f(\mathbb{N})=a\mathbb{N}=P\cup\{0\}$.

En particular, per a tot i, $0\leq i\leq a-1$, es té

$$f(i)=a\,n_i, \text{ amb } n_i\in\mathbb{N} \text{ i } n_0=0.$$

Sigui ara $n\in\mathbb{N}$ arbitrari. Dividint per a,

$$n=ka+i, \quad 0\leq i<a.$$

Resulta aleshores que

$$f(n)=f(i+ka)=f\big(i+f(ka)\big)=f(i)+ka=n_ia+ka=\left(\left[\frac{n}{a}\right]+n_i\right)a.$$

Comprovem que aquestes funcions compleixen l'equació funcional. Siguin $m=ka+i$, $n=ha+j$, $0\leq i,j<a$. Llavors

$$\begin{aligned}f\big(m+f(n)\big)&=f\big(ka+i+f(ha+j)\big)=f\big(ka+i+(h+n_j)a\big)\\&=f(k+h+n_j)a+i=(k+h+n_j+n_i)a\\&=(k+n_i)a+(h+n_j)a=f(m)+f(n).\end{aligned}$$

Per tant, si f no és la funció nul·la, té la forma general següent:

Sigui $a \in \mathbb{N}$ i n_0, n_1, ..., n_{a-1}, nombres naturals arbitraris, amb $n_0 = 0$. Aleshores

$$f(n) = \left(\left[\frac{n}{a}\right] + n_i\right) a,$$

on i es el residu de la divisió de n per a.

La funció identitat és d'aquesta forma, amb $a = 1$.

L'exemple següent va ser el problema 6 de la IMO de 1998 a Taiwan. La revista francesa *Quadrature*, núm. 34, Oct-Nov-Des. 98, pàgs. 47-48, va publicar una anàlisi excel·lent d'aquest problema, a càrrec de Roger Cuculière. S'hi descobreix, entre d'altres coses, que la funció completament multiplicativa i involutiva s'ha utilitzat en tres ocasions a les IMO: el 1983 (Problema 1), el 1994 (Problema 5) i el 1998 (Problema 6). I, curiosament, si mirem la solució del problema de 1983, inevitablement ens recorda la solució de l'exemple precedent ...

També és molt instructiu l'anàlisi que del problema de 1994 fan J.P.Boudine, F.Lo Jacomo, i R.Cuculière a l'excel·lent publicació francesa *Olympiades Internationales de Mathématiques: enoncés et solutions detaillées (1988-1997)*, Editions du Choix, 1998.

Problema 7. Determineu el menor valor possible de $f(1998)$, si f és una funció del conjunt $\mathbb{N}$ dels enters positius en ell mateix, tal que, per a tots els $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f\big(n^2 f(m)\big) = m\big(f(n)\big)^2.$$

Solució (oficial). Anomenem S al conjunt de funcions considerades, sigui f una qualsevol d'elles, i posem $f(1) = a$.

Fent separadament $n = 1$, $m = 1$, obtenim

$$f\big(f(m)\big) = a^2 m; \qquad f\big(an^2\big) = \Big[f(n)\Big]^2 \quad \text{per a tot } m, n \in \mathbb{N}.$$

Aquestes relacions, junt amb l'equació funcional original, donen

$$\begin{aligned}\big[f(m)f(n)\big]^2 &= \big[f(m)\big]^2 f\big(an^2\big) = f\Big(m^2 f\Big(f\big(an^2\big)\Big)\Big) = \\ &= f\big(m^2 a^2 a n^2\big) = f\Big(a\big(amn\big)^2\Big) \\ &= \big[f(amn)\big]^2.\end{aligned}$$

En deduïm que $f(amn) = f(m)f(n)$, qualssevol que siguin m, n; en particular, $f(am) = af(m)$, i aleshores

$$af(mn) = f(m)f(n) \quad \text{per a tots els } m, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Ara provarem que $f(n)$ és divisible per a per a cada $n \in \mathbb{N}$.
Per un cert primer donat p, siguin p^α, p^β les potències més grans de p que divideixen, respectivament, a i $f(n)$. Per inducció, i utilitzant (1), es demostra que

$$\big[f(n)\big]^k = a^{k-1} f\big(n^k\big) \text{ per a tot } k \in \mathbb{N}.$$

La potència més gran de p que divideix $\big[f(n)\big]^k$ és $p^{k\beta}$; la potència més gran de p que divideix a^{k-1} és $p^{(k-1)\alpha}$. Per tant,

$$k\beta \geq (k-1)\,\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

que només és possible si $\beta \geq \alpha$. La conclusió es compleix per a qualsevol primer p, de manera que a divideix $f(n)$. Per tant, podem posar $g(n) = f(n)/a$, i obtenim una nova funció g de $\mathbb{N}$ en ell mateix. Els resultats provats abans demostren que

$$g(a) = a,\ g(mn) = g(m)g(n),\ g\big(g(m)\big) = m \tag{2}$$

qualssevol que siguin $m, n \in \mathbb{N}$. En efecte, $g(mn) = g(m)g(n)$ és equivalent a (1), i la propietat involutiva $g\big(g(m)\big) = m$ es dedueix de

$$\begin{aligned} ag\big(g(m)\big) &= g(a)g\big(g(m)\big) = g\big(ag(m)\big) = g\big(f(m)\big) = \\ &= \frac{f\big(f(m)\big)}{a} = \frac{a^2 m}{a} = am. \end{aligned}$$

Es fàcil (?) deduir de (2) que

$$g\big(n^2 g(m)\big) = g\big(n^2\big)g\big(g(m)\big) = m\big[g(n)\big]^2 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Per tant, g es també una funció de S i els seus valors no excedeixen dels corresponents de f. Així podem limitar l'atenció a les funcions g que compleixen (2). El fet essencial és que cada funció d'aquest tipus transforma primers en primers.
En efecte, sigui p un primer, i posem $g(p) = uv$ per certs enters positius u, v. Per (2),

$$p = g\big(g(p)\big) = g(uv) = g(u)g(v),$$

d'on, un d'aquests factors, diguem $g(u)$, ha de ser ser 1. Llavors $u = g\big(g(u)\big) = g(1) = 1$, de manera que $g(p)$ es primer.
Per tal de determinar el mínim valor buscat, sigui g qualsevol funció que satisfaci (2). Es injectiva, perquè

$$g(m) = g(n) \Longrightarrow m = g\big(g(m)\big) = g\big(g(n)\big) = n,$$

així que transforma primers diferents en primers diferents. Per tant una fita inferior per

$$g(1998) = g\big(2 \cdot 3^3 \cdot 37\big) = g(2)\big[g(3)\big]^3 g(37)$$

s'obté quan $g(2), g(3), g(37)$ són els tres primers més petits, $2, 3, 5$, amb $g(3) = 2$. Això dóna $g(1998) \geq 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ per a cada funció $g \in S$.
Vegem, finalment, que hi ha una funció a S que abasta aquesta fita: Posem $g(1) = 1$, i definim g sobre els nombres primers de la següent manera:

$$g(2) = 3,\ g(3) = 2,\ g(5) = 37,\ g(37) = 5;$$
$$g(p) = p \text{ per als altres primers}$$

La definició s'estén aleshores a qualsevol nombre

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}$$

posant

$$g(n) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \dots g(p_k)^{\alpha_k}.$$

Les condicions (2) es compleixen (amb $a = 1$), i per tant $g \in S$. Clarament, $g(1998) = 120$, i hem acabat.

Com a pont cap a la Geometria veurem ara un exemple d'un problema proposat al Canadà a la IMO de 1995 per la República Txeca. (Seria imperdonable que no posés problemes de geometria en una selecció com aquesta.)

Problema 8. Determineu tots els enters $n > 3$ per als quals existeixen n punts A_1, A_2, $\dots$, A_n en el pla, i nombres reals r_1, r_2, $\dots$, r_n que compleixen les següents condicions:
1) Entre els punts $A_1, \dots, A_n$ no n'hi ha tres que estiguin alineats;
2) Per a cada terna i, j, k, $(1 \leq i < j < k \leq n)$, el triangle $A_iA_jA_k$ té àrea igual a $r_i + r_j + r_k$.

Solució.
Notació: Designarem l'àrea del triangle $A_iA_jA_k$ per

$$[ijk] = \big[A_iA_jA_k\big],$$

i anàlogament per a d'altres polígons.
Vegem que el problema té solució per a $n = 4$; basta considerar el quadrat unitat $A_1A_2A_3A_4$, prenent $r_i = 1/6$ per a tot i, $1 \le i \le 4$.
Més generalment, per quatre punts qualssevol sempre es poden trobar r_i convenients, per tal com el sistema d'equacions

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = a \\ r_2 + r_3 + r_4 = b \\ r_1 + r_3 + r_4 = c \\ r_1 + r_2 + r_4 = d \end{cases}$$

sempre té solució única:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{a - 2b + c + d}{3} \\ r_2 &= \frac{a + b - 2c + d}{3} \\ r_3 &= \frac{a + b + c - 2d}{3} \\ r_4 &= \frac{-2a + b + c + d}{3}. \end{aligned}$$

(Això es més del que demanava el problema; un altre exemple per $n = 4$ s'obté agafant com a A_4 el centre de gravetat del triangle $A_1A_2A_3$ i elegint $r_1 = r_2 = r_3 = -r_4 = 1/3$).)
Demostrarem que no hi ha solució per a $n = 5$ la qual cosa implicarà que ja no n'hi ha per a $n \ge 5$.
Comencem amb les següents observacions:
Observació 1. Si $A_iA_jA_kA_h$ es un quadrilàter convex, aleshores

$$r_i + r_k = r_j + r_h.$$

La demostració surt d'observar

$$[ijk] + [khi] = [A_iA_jA_kA_h] = [jkh] + [hij]\,, \text{ és a dir}$$

$$2r_i + r_j + 2r_k + r_h = r_i + 2r_j + r_k + 2r_h.$$

Observació 2. Els nombres r_i han de ser tots diferents.

En efecte, suposem per exemple que $r_4 = r_5$. Al menys dos dels punts A_1, A_2, A_3 estaran al mateix costat de la recta A_4A_5; suposem que són A_1 i A_2. Ja que $r_4 = r_5$, ha de ser ser $[124] = [125]$, cosa que implica que A_4A_5 es paral·lela a A_1A_2. Hi ha dos casos a considerar:

a) A_3 és al mateix costat de A_4A_5 que A_1 i A_2.

El mateix argument d'abans ens diu que A_2A_3 es paral·lel a A_4A_5. Però aleshores A_2A_3 es paral·lel a A_1A_2, cosa que és impossible perquè A_1, A_2 i A_3 no estan alineats.

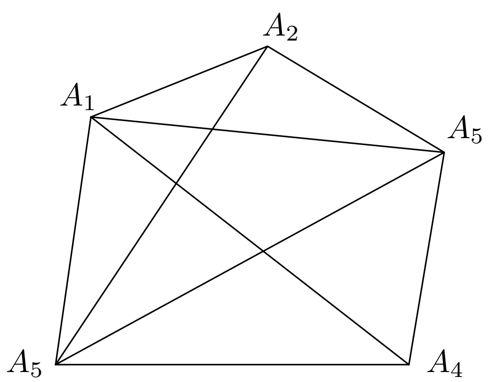
b) A_3 és al costat oposat de A_1 i A_2 respecte de A_4A_5.

Llavors, com que A_1A_2 és paral·lel a A_4A_5, tenim que $[145] = [245]$, i $r_1 = r_2$. Tornem a començar la demostració amb els subíndexs 4 i 5 en lloc de 1 i 2. Aquesta vegada sabem que s'aplicarà el cas a), ja que els punts A_3, A_4 i A_5 estan al mateix costat de A_1A_2.

Així doncs, tots els r_i han de ser diferents.

Tornem al problema principal. Considerem l'envolvent convexa dels 5 punts A_i. Poden presentar-se tres situacions:

I) L'envolvent convexa es un pentàgon $A_1, \ldots, A_5$.

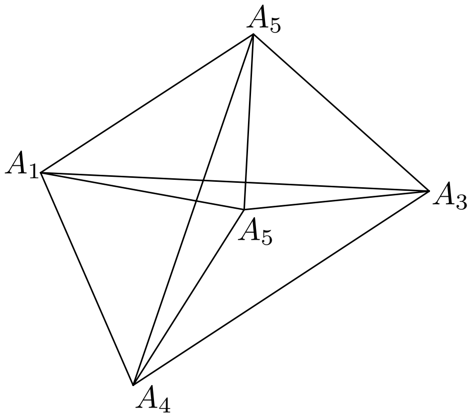


Els quadrilàters $A_1A_2A_3A_4$ i $A_1A_2A_3A_5$ són convexos; per l'observació 1 tenim

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4 \quad \text{i} \quad r_1 + r_3 = r_2 + r_5$$

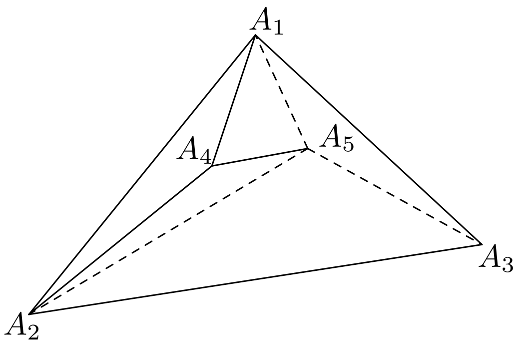
i per tant ha de ser $r_4 = r_5$, impossible per l'observació 2.

II) L'envolvent convexa és un quadrilàter $A_1A_2A_3A_4$.



Podem suposar que A_5 és a l'interior de $A_3A_4A_1$. Aleshores $A_1A_2A_3A_5$ és un quadrilàter convex i es té la mateixa contradicció d'abans.

III) L'envolvent convexa és un triangle $A_1A_2A_3$.



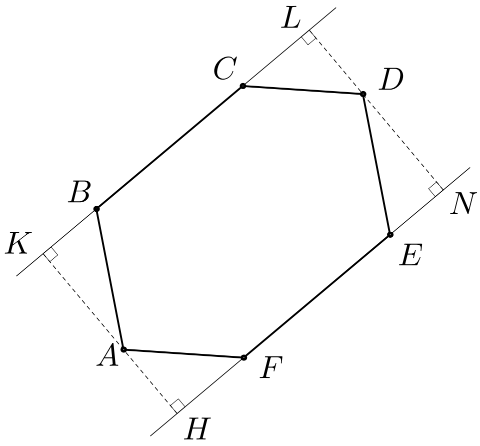
A causa de $[124]+[234]+[314]=[A_1A_2A_3]=[125]+[235]+[315]$, tenim $r_4=r_5$, en contra de l'observació 2.

Una de les desigualtats geomètriques més difícils de la IMO va ser proposada per Armènia a l'Olimpíada de 1996 celebrada a Bombay. (Vegeu la observació 2 del final).

Problema 9. (Original de Nairi M. Sedrakian). Sigui $ABCDEF$ un hexàgon convex tal que AB és paral·lel a ED, BC és paral·lel a FE i CD és paral·lel a AF. Siguin R_A, R_C, R_E els radis de les circumferències circumscrites als triangles FAB, BCD i DEF, respectivament; i sigui p el perímetre de l'hexàgon. Demostreu que

$$R_A+R_E+R_C \geq \frac{p}{2}.$$

Solució (oficial). Siguin a,b,c,d,e,f les longituds de AB, BC, CD, DE, EF i FA, respectivament. Observeu que els angles oposats del hexàgon són iguals $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$). Des de A i D es tracen perpendiculars a les rectes BC i EF (vegeu la figura)



Es compleixen les relacions

$$KH = AB \sin B + AF \sin F$$
$$LN = DC \sin C + DE \sin E$$

que, mitjançant la igualtat d'angles oposats a l'hexàgon, es converteixen en

$$KH = AB \sin B + AF \sin C$$
$$LN = DC \sin C + DE \sin B.$$

La distància $KH = LN$ és la distància entre les rectes BC i EF, i per tant

$$BF \geq KH = LN,$$

d'on

$$2BF \geq KH + LN = AB \sin B + AF \sin C + DC \sin C + DE \sin B.$$

El teorema dels sinus aplicat a ABF dóna $BF = 2R_A \sin A$, d'on surt

$$4R_A \sin A = 2BF \geq AB \sin B + AF \sin C + DC \sin C + DE \sin B$$

i, anàlogament

$$4R_C \sin C = 2BD \geq FA \sin A + FE \sin B + CB \sin B + CD \sin A$$
$$4R_E \sin B = 2DF \geq BC \sin C + BA \sin A + ED \sin A + EF \sin C$$

Dividint aquestes desigualtats respectivament per $\sin A$,$\sin B$, $\sin C$ i sumant, s'obté

$$\begin{aligned} 4\,(R_A + R_C + R_E) \geq DC\Big(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\Big) + CB\Big(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\Big) + \\ + BA\Big(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\Big) + AF\Big(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\Big) + \\ + FE\Big(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\Big) + ED\Big(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\Big), \end{aligned}$$

i ja l'únic que falta per a obtenir el resultat és utilitzar la desigualtat (ben coneguda) $x/y + y/x \geq 2$, ja que resulta

$$4\,(R_A + R_C + R_E) \geq 2p \Longleftrightarrow R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

Observació 1. Sedrakian ha publicat a *Mathematics Competitions*, vol. 9, núm. 2, 1996, un article titulat *The Story of creation of a 1996 IMO problem*, en el qual explica el procés d'obtenció del problema.

Observació 2. Aquest problema va ser el més difícil de la IMO de Bombay; només el van resoldre 6 concursants: dos romanesos i 4 armenis (!!!). Els sis concursant xinesos hi van obtenir zero punts.

En una ocasió, un problema proposat per Espanya va estar a prop de resultar elegit a la IMO. Va ser el 1993; el comitè seleccionador de problemes l'havia senyalat amb $*****$ (molt difícil) i amb **!!** (altament recomanat), ja que no s'havia pogut trobar cap solució diferent de la proposada bastant llarga, per cert; com que és meva, ningú no s'ofendrà per aquest comentari). Però el Cap de la Delegació d'Holanda, Johannes Notemboom, va trobar la següent, molt més curta i elegant.

Problema 10. Al triangle ABC, siguin D, E punts del costat BC tals que $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Si M, N són, respectivament, els punts de tangència amb BC dels cercles inscrits a ABD i ACE, proveu que

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}.$$

Solució. Reformularem el problema en els següents termes: Donat el triangle ABC, amb $\widehat{A}$ constant i h_a constant, si el cercle inscrit es tangent a BC a M, demostreu que

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CM}$$

es constant.

En efecte, si indiquem per p el semiperímetre del triangle ABC, tenim les igualtats

$$(*)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}=\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}&=\frac{a}{(p-b)(p-c)}\\ &=\frac{4a}{(a+b-c)(a-b+c)}=\frac{4a}{a^2-(b-c)^2}\\ &=\frac{4a}{2bc(1-\cos A)}\end{aligned}$$

Però

$$ah_a = bc\sin A = 2S \iff \frac{a}{bc}=\frac{\sin A}{h_a},$$

així que si ho portem a (*) resulta

$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}=\frac{2\sin A}{h_a(1-\cos A)},$$

que és constant perquè A i h_a ho són.

El següent exemple va ser un problema molt bonic proposat el 1997 a Mar del Plata (no en tinc referència del país d'origen). Les tres solucions presentades al Jurat eren molt llargues i bastant complicades. El representant hindú, Shailesh Shirali, va obtenir una solució molt curta, però usava coordenades trilineals (proporcionals a les distàncies d'un punt als costats del triangle de referència), un instrument poc conegut, però que transforma difícils problemes de colinealitat en exercicis d'anul·lació de determinants. No va agradar gaire a la concurrència, com, aparentment, tampoc la solució que jo mateix vaig trobar, i que presento a continuació:

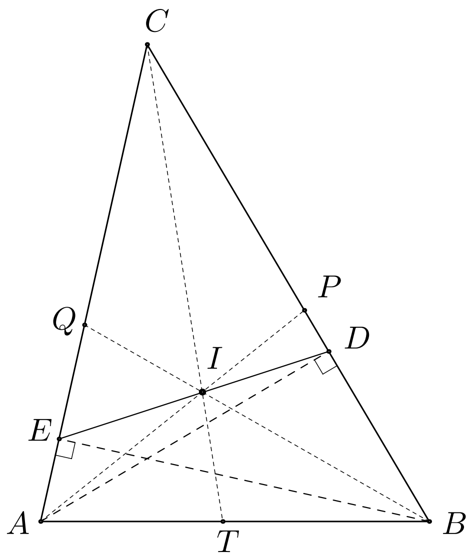
Problema 11. En el triangle acutangle ABC, AD i BE són altures, i AP, BQ bisectrius interiors. Si I, O són, respectivament, l'incentre i el circumcentre de ABC, demostreu que D, E, I estan alineats si i només si P, Q, O estan alineats.

Solució. Com que AD i BE són altures,

$$(1)\qquad \frac{BD}{DC}=\frac{c\cos B}{b\cos C};\qquad \frac{AE}{EC}=\frac{c\cos A}{a\cos C}$$

Com que AP i BQ són bisectrius interiors,

$$(2)\qquad \frac{BP}{PC}=\frac{c}{b};\qquad \frac{AQ}{QC}=\frac{c}{a}.$$



D'altra banda, la condició necessària i suficient per tal que la transversal EF passi per l'incentre I de ABC és

$$\frac{EA}{EC}a + \frac{DB}{DC}b = c; \tag{3}$$

i la condició necessària i suficient par tal que la transversal PQ passi pel circumcentre O del triangle acutangle ABC és

$$\frac{QA}{QC}\sin 2A + \frac{PB}{PC}\sin 2B = \sin 2C. \tag{4}$$

Substituint (2) a (3) i (1) a (4) s'obté, respectivament,

$$(3) \iff \frac{\cos A}{\cos C} + \frac{\cos B}{\cos C} = 1$$

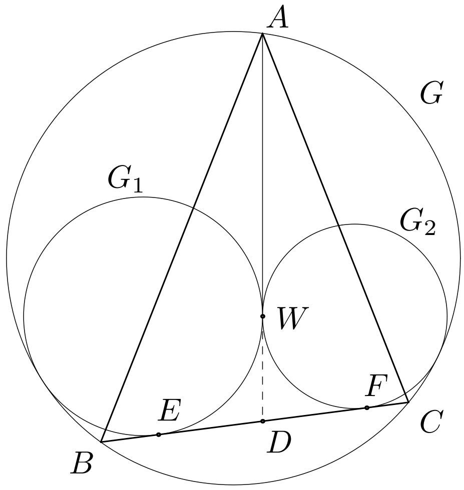
$$(4) \iff \text{(usant el teorema del sinus) } \frac{\sin C \sin A \cos A}{\sin A \sin C \cos C} + \frac{\sin C \sin B \cos B}{\sin B \sin C \cos C} = 1$$

que són clarament equivalents.

Nota: (3) i (4) són casos particulars de l'anomenat teorema de la transversal, o teorema de Cristea (1953); per a un tractament d'aquest teorema, vegeu [2].

El nostre darrer exemple de geometria plana és el problema proposat per l'Índia el 1992, però que no fou elegit. Quan fou rebutjat, la representant de Colòmbia comentà: "S'ha eliminat el més bell problema de tota aquesta Olimpíada". Hi estic d'acord.

Problema 12. Les circumferències G, G_1, G_2 estan relacionades de la següent manera: G_1 i G_2 són tangents exteriors en el punt W; totes dues són, ademés, tangents interiors a G. Els punts A, B i C de la circumferència G es determinen de la següent forma: BC és la tangent exterior comuna a G_1 i G_2; i WA és la tangent comuna interior a G_1 i G_2, de manera que W i A estan en un mateix costat de la recta BC.
Demostreu que W és l'incentre de ABC.



$BE = x$
$ED = \beta - x$
$DF = \gamma - x$
$FC = y$
$AD = d$

Solució (oficial). Sigui D el punt de tall de WA amb BC i siguin E, F els punts on G_1 i G_2 són tangents a BC. Definim les longituds x, y, β, γ, d, així:

$$x = BE,\ y = CF,\ \beta = BD,\ \gamma = CD,\ d = AD;$$

aleshores es té

$$DE = \beta - x, \quad DF = \gamma - y$$

i donat que $DE = DW = DF$, és $\beta - x = \gamma - y$. Ademés, $AW = d - \beta + x = d - \gamma + y$. Considerarem el sistema de 4 circumferències:

de centre A i radi 0;

G_1;

de centre B i radi 0;

de centre C i radio 0.

Aquests quatre cercles són tangents a G; els considerarem interiors i aplicarem el teorema generalitzat de Ptolomeu (o de Casey) entre les longituds de les tangents comunes exteriors, que són :

$$\text{entre } (A,0) \text{ i } G_1 : d-\beta+x$$
$$\text{entre } (A,0) \text{ i } (B,0) : c$$
$$\text{entre } (A,0) \text{ i } (C,0) : b$$
$$\text{entre } G_1 \text{ i } (B,0) : x$$
$$\text{entre } G_1 \text{ i } (C,0) : a-x$$
$$\text{entre } (B,0) \text{ i } (C,0) : a.$$

per tant, segons la relació de Ptolomeu,

$$(d-\beta+x)a+bx=c(a-x),$$

que es pot escriure, amb l'habitual notació $2p=a+b+c$,

(1) $$x=\frac{a}{2p}(\beta+c-d).$$

De manera anàloga, considerant G_2 i els tres cercles degenerats anteriors, s'arriba a

(2) $$y=\frac{a}{2p}(\gamma+b-d)$$

Com que $DE=DW=DF$, usant (1) i (2), podem escriure

$$\beta-\frac{a}{2p}(\beta+c-d)=\gamma-\frac{a}{2p}(\gamma+b-d),$$

o bé

$$(b+c)\beta-ac=(b+c)\gamma-ab \Longleftrightarrow (b+c)(\beta-\gamma)=a(c-b).$$

Com que $\beta+\gamma=a$, aquesta última expressió dóna

$$(b+c)(\beta-\gamma)=(\beta+\gamma)(c-b),$$

que se simplifica fins a arribar a

$$c\gamma=\beta b \Longleftrightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC} \Longleftrightarrow AD \text{ bisectriu de } \widehat{BAC}.$$

Per a completar la solució del problema hem de provar que BW és una altra bisectriu; ho farem en el triangle ABD perquè AD és tangent a G_1 i G_2 i així no cal buscar expressions per als segments determinats per BW sobre CA.

Pel teorema de la bisectriu,

$$\beta = \frac{ac}{b+c}; \qquad \gamma = \frac{ab}{b+c},$$

d'on

$$\beta - x = \frac{ad}{2p};$$

i per tant,

$$\frac{d}{\beta - x} = \frac{2p}{a} = \frac{a+b+c}{a},$$

i aleshores

$$\begin{aligned}\frac{AW}{DW} &= \frac{AD}{DW} - 1 = \frac{d}{\beta - x} - 1 = \frac{a+b+c}{a} - 1 \\ &= \frac{b+c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{BA}{BD} \iff BW \quad \text{bisectriu de } \widehat{ABC}\end{aligned}$$

La solució és completa.

Com a últim problema d'aquesta selecció, n'incloïrem un de Geometria de l'espai amb desigualtats i matemàtica discreta, una combinació que va resultar "explosiva" per a molts participants a la IMO de 1992 a Moscou, on va ser presentat per Itàlia.

Problema 13. Sigui S un conjunt finit de punts en l'espai tridimensional, amb el sistema de coordenades cartesianes. Siguin S_x, S_y, S_z els conjunts formats per les projeccions ortogonals dels punts de S sobre els plans yz, zx, xy, respectivament.
Demostreu que $|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| \geq |S|^2$, on $|A|$ representa el nombre d'elements del conjunt finit A.

Solució (oficial). Posem $a = |S_x|$, $b = |S_y|$, $c = |S_z|$. Utilitzarem la inducció sobre $|S|$.
Si el conjunt té un únic punt, la proposició és veritat: $1 \times 1 \times 1 \geq 1^2$.
Suposem que la proposició és certa per a $|S| < N$.
Considerem un conjunt S tal que $|S| = N$.
És clar que existeix un pla paral·lel a un dels plans de coordenades, que no conté punts de S i que divideix S en dos subconjunts no buits, S_1, S_2, de manera que

$$N = |S_1| + |S_2|, \quad |S_1| < N, \quad |S_2| < N.$$

per la hipòtesi d'inducció, se compleixen les desigualtats

$$a_1 b_1 c_1 \geq |S_1|^2, \quad a_2 b_2 c_2 \geq |S_2|^2.$$

Podem suposar, sense perdre generalitat, que el pla divisor es paral·lel al pla xy. Aleshores

$$a_1 + a_2 = a, \quad b_1 + b_2 = b, \quad c \geq c_1,\ c \geq c_2.$$

Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} abc &= c(a_1+a_2)(b_1+b_2) \geq \\ &\geq c\Big(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}\Big)^2 = \\ &= \left(\sqrt{a_1b_1}\sqrt{c}+\sqrt{a_2b_2}\sqrt{c}\right)^2 \geq \\ &\geq \left(\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2}\right)^2 \geq \\ &\geq \big(\,|S_1|+|S_2|\,\big)^2 = |S|^2\,, \end{aligned}$$

i hem acabat.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bellot, F. i López, M. A.,*Cien problemes de Matemáticas: Combinatoria, Álgebra, Geometría.* ICE de la U. de Valladolid, 1994.
[2] Bellot, F., *El teorema de las transversales y algunas consecuencias*; SIPROMA, núm. 1, juny 1997. O.E.I.

Resum de bibliografia anglesa

– Cofman, Judita, *What to solve?*, Claredon Press-Oxford, 1990.

– Klamkin, M. S.,*USA Mathematical Olympiads 1972-1986*, Math. Ass. of Amer., 1988

– Klamkin, M. S., *International Mathematical Olympiads 1959-1977*, Math. Ass. of Amer., 1978

– Klamkin, M. S., *International Mathematical Olympiads 1978-1985*, Math. Ass. of Amer., 1986

– Biggs, N. L.,*Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 1989.

– Roberts, F. S., *Applied Combinatorics*, Prentice-Hall, 1984.

– Coxeter, H. S. M. i Greitzer, S. L., *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America.

– Eves, H., *A survey of geometry*, Allyn and Bacon.

– Larson, L. C., *Problem-solving through problems*, Springer-Verlag.

Resum de bibliografia castellana

– Bellot, F., Deban, M. V. i López, F., *Olimpiada Matematica Española*, I.C.E., Univ. de Valladolid, 1992

– Bellot, F. i López Chamorro, M. A., *Cien problemas de matemáticas*, I.C.E., Univ. de Valladolid, 1994

– Col·lecció *La Tortuga de Aquiles*, DLS-Editores, Madrid (traduccions dels llibres de la Math. Ass. of America).

– Grimaldi, R. P., *Matemática Discreta y Combinatoria,* Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

– Coxeter, H. S. M., *Fundamentos de Geometría.* Limusa.

– Fauring P. et al., *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemáticas.* Publicaciones de la Organización de Estados Iberoamericanos, 1997.

– Puig Adam, P., *Curso de Geonetría métrica* (Tomo I - Fundamentos). Gómez Puig Ediciones.

Resum de bibliografia catalana

– *1r FORUM de problemes 93/94*, Societat Catalana de Matemàtiques, Institut d'Estudis Catalans.

– *2n FORUM de problemes 94/95*, Societat Catalana de Matemàtiques, Institut d'Estudis Catalans.