Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Gener 2009

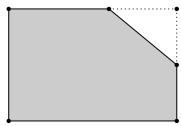
Problemes de la branca d'olivera

1. Si S és el 25 % de 60, 60 és el 80 % de U, 80 és el M % de 25 i A és 2009, calcula el valor de $S + U + M + A$

La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 7 com a nombre R.

2. Quina és la xifra de les desenes de 11^{2009}?

3. Hem retallat un triangle en un vèrtex d'un rectangle com s'indica a la figura (que, com és habitual, no està pas feta a escala). El pentàgon que hem obtingut té com a longituds dels costats (potser no en aquest ordre) 8, 10, 13, 15 i 20 unitats. Quina és l'àrea del pentàgon, expressada en unitats quadrades?



A) 252,5 u^2 B) 270 u^2 C) 282,5 u^2 D) 275,5 u^2 E) 260 u^2

4. A l'Antoni li han explicat que $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ i ell ha interpretat que el procediment per restar fraccions consisteix a fer això:

- *es resten els numeradors i es multipliquen els denominadors.*

Si la professora li posa a l'Antoni com a feina fer totes les restes $\frac{a}{7} - \frac{b}{5}$, on a i b són nombres enters positius d'una xifra amb $a > b$, quin serà el percentatge de respostes correctes que donarà l'Antoni si fa les restes amb el seu peculiar procediment?

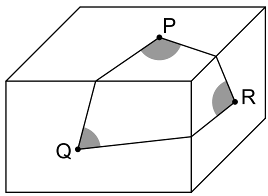
Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 5 necessiteu un nombre V que us han de passar des del problema 6.

5. Tenim un ortoedre de fusta de volum V cm^3 que té les tres dimensions nombres enters més petits que 10, (és a dir que serà de a cm $\times$ b cm $\times$ c cm amb a, b, c enters, a, b, $c < 10$). La Berta ha pintat les cares exteriors i ha necessitat exactament un pot de pintura. Tot seguit amb una serra hem tallat repetidament el bloc de fusta fins que hem obtingut V cubets unitaris, de 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm. Si ara la Berta vol pintar totes les cares exteriors dels cubets (només les que no estaven pintades, és clar!), calculeu quants pots de pintura necessitarà, amb el benentès que els pots de pintura només els pot comprar sencers.

Heu de passar al darrer repte (problema 12) com a valor N la resposta numèrica d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

6. Una formiga viu a les cares d'un ortoedre. Sempre que s'ha de desplaçar d'un punt a un altre ho fa pel camí més curt i, com que sap geometria, realment encerta sempre el camí més curt per anar d'un punt d'una cara a un punt d'una altra cara. A la figura es mostra l'itinerari que ha seguit per anar des de P cap a Q, després de Q cap a R i finalment per tornar des de R fins a P. Quina és la suma dels tres angles assenyalats a la figura?



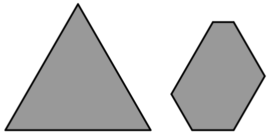
A) 180°   B) 270°   C) 360°   D) 240°   E) 225°

El nombre de graus de la resposta s'ha de passar al problema 5, on rep el nom de V.

Per al problema 7 es necessita un nombre R, que passa del problema 1.

7. La mitjana d'un conjunt de R nombres és R. Afegim al conjunt 2009 nombres i aleshores resulta que la mitjana del conjunt dels $2009 + R$ nombres és $2009 + R$. Quina és la mitjana dels 2009 nombres que hem afegit?

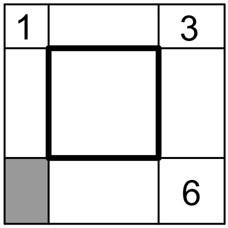
8. Equips d'ESO. Construïm un hexàgon retallant un petit triangle equilàter de cada vèrtex d'un triangle equilàter gran. Els costats dels triangles equilàters que hem retallat tenen com a longituds 1, 2 i 3 unitats. La raó entre el perímetre del triangle equilàter original i el perímetre de l'hexàgon és $\frac{7}{5}$. Quina és la raó entre l'àrea del triangle equilàter original i l'àrea de l'hexàgon?



A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{16}{9}$ E) $\frac{49}{25}$

---

8. Equips d'ESO i Batxillerat. Un quadrat s'ha partit en 9 regions mitjançant rectes paral·leles als costats. La regió assenyalada amb un traç més gruixut és un quadrat i les altres són rectangles. Coneixem les àrees de tres d'aquests rectangles, que estan indicades a la figura. Quin és el perímetre del rectangle acolorit?



A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) 2 C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) $\frac{11\sqrt{3}}{3}$

---

9. Equips d'ESO. Tirem dos daus, amb les cares marcades amb els números 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Quina és la probabilitat que amb les dues xifres que assenyalen els dos daus puguem escriure un nombre de dues xifres que sigui quadrat perfecte?

---

9. Equips d'ESO i BTX. Rafael Nadal i Roger Federer han de jugar un partit en una pista de terra batuda, al millor de tres sets, és a dir que el jugador que guanya dos sets ja ha guanyat el partit. S'estima que la probabilitat que té Rafael Nadal de guanyar cada set és 2/3. Quina és l'estimació que hem de fer de la probabilitat que té Rafael Nadal de guanyar el partit?

Per les dues versions del problema 9, si $\frac{d}{n}$ *n'és la solució, expressada com una fracció irreductible, cal passar* $S = d - n$ *al problema 10.*

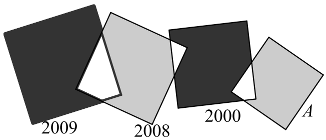
Reptes finals

Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre S que passa del problema 9. Tanmateix sense aquest valor ja es pot anar pensant el problema!

10. Es considera el conjunt de nombres enters de l'1 al 2009, $C = \{1, 2, 3, ..., 2008, 2009\}$. ¿Quina és la màxima quantitat de nombres diferents que podem escollir en el conjunt C de manera que no n'hi hagi cap parella amb la propietat que la seva suma sigui un múltiple de S?

El nombre solució del problema 10 passa al problema 11 com a nombre A.

11. Quatre quadrats, d'àrees respectives 2009, 2008, 2000 i A unitats d'àrea s'han encavalcat com mostra la figura i s'han pintat els polígons que han quedat determinats. Quin és el resultat de restar l'àrea de color gris fosc menys l'àrea de color gris clar?



Per acabar aquest problema es necessita un nombre N que ve del problema 5.

12. Un transportista de les terres de l'Ebre ha carregat un camió amb N tones ($1000N$ quilos) de melons de moro (també anomenats en algunes altres contrades melons d'Alger, o melons d'aigua, o síndries, o sindris o xíndries). S'estima que el 92% del pes dels melons de moro és aigua. Durant el transport fins al mercat feia molta calor i s'ha evaporat part de l'aigua de manera que aleshores es pot estimar que només el 90% del pes del carregament serà aigua. Amb quants quilos de melons de moro ha arribat el transportista a la seva destinació?

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Gener 2009

Participació i centres destacats

En aquesta XV edició dels **Problemes a l'esprint** adreçada a equips d'alumnes de segon cicle d'ESO i batxillerat, celebrada el 29 de gener de 2009, van participar 54 centres de les Illes Balears, la Comunitat Valenciana i Catalunya. Després d'analitzar les respostes rebudes i de felicitar totes les xiques i xics, al·lotes i al·lots, sagals i sagales, nois i noies que van participar i al professorat que va col·laborar en l'activitat, es va acordar convidar tres centres a l'acte d'entrega de premis, un dels quals, com a mínim, fos dels que participava només amb alumnes de l'ESO.

Centres més destacats

- IES Pere Fontdevila (Gironella), 52 minuts,
  centre guanyador de l'activitat
- Aula Escola Europea (Barcelona), 53 minuts
- IES Sabadell (Sabadell),72 minuts,
  el millor centre només amb alumnes d'ESO

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

IES Miguel Hernández (Alcoi)
IES Arquitecte Manuel Raspall (Cardedeu)
IES Jaume Vicens Vives (Girona)
IES Santa Eugènia (Girona)
Col·legi Jardí (Granollers)
IES Manuel Blancafort (La Garriga)
IES El Pedró (L'Escala)
IES Samuel Gili i Gaya (Lleida)
IES Gregori Maians (Oliva)
IES Sant Just (Sant Just Desvern)
Cultura Pràctica (Terrassa)

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Gener 2009

Les solucions

1. 2419.

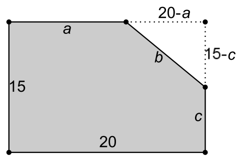
Si $S = \dfrac{25 \cdot 60}{100}$, $60 = \dfrac{80 \cdot U}{100}$, $80 = M \cdot \dfrac{25}{100}$ i $A = 2009$, es calcula i resulta $S + U + M + A = 2419$.

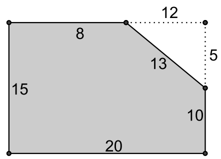
2. 9.

Es pot fer per multiplicacions reiterades per 11 (només cal escriure les dues últimes xifres de cada multiplicació parcial) i es veu que la xifra de les desenes de 11^i segueix la cadència 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3 ,... i per això 11^{2009} acaba en 9. També es pot fer mitjançant la fórmula del Binomi de Newton. S'observa que $11^{2009} = (10+1)^{2009}$ i desenvolupant la potència resulta una suma de molts sumands que són múltiples de 100 més els dos últims, que són $2009 \cdot 10^1 \cdot 1^{2008} + 1^{2009}$. Aquesta suma acaba en 91.

3. B. 2709.

El costat més llarg del rectangle ha de ser el de 20. L'altre costat ”no retallat” del rectangle ha de ser el de 15 perquè la suma de les longituds dels dos costats del rectangle ha de ser més gran que la suma dels altres tres costats del pentàgon. A partir d'aquí es poden estudiar totes les variacions possibles per assignar als costats que a la figura s'han indicat com a, b, c els valors 8, 10 i 13. S'ha de comprovar que en el triangle retallat, de costats $20-a, b, 15-c$ es compleixi el teorema de Pitàgores i es veu que l'única possibilitat és $a = 8$, $\quad b = 13$, $c = 10$ i així resulta un triangle rectangle de catets 12 i 5 i hipotenusa 13. Després ja només cal calcular l'àrea del rectangle inicial $(20 \cdot 15 = 300)$ i restar-li l'àrea del triangle retallat $(12 \cdot \dfrac{5}{2} = 30)$ i es veu que l'àrea del pentàgon és 270.





4. 8,3 %.

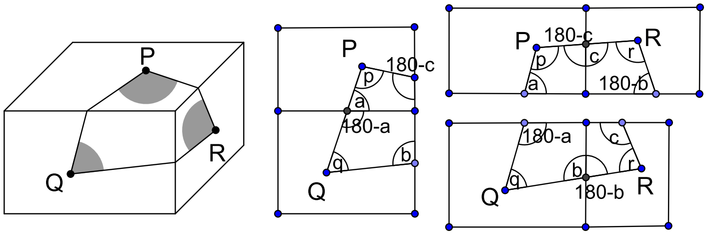
Si volem que $\frac{a}{7} - \frac{b}{5} = \frac{5a-7b}{35} = \frac{a-b}{35}$ on ja hem igualat la resposta correcta i la que obtindrà l'Antoni, veiem que s'ha de complir $5a - 7b = a - b \Rightarrow 4a = 6b \Rightarrow 2a = 3b$. Com que ha de ser $10 > a > b$ i a, b nombres enters, s'observa que les úniques possibilitats són $a = 3, b = 2$; $a = 6, b = 4$ i $a = 9, b = 6$. Com que per altra banda el nombre de parelles (a, b) que compleixen $10 > a > b$ i a, b nombres enters és 36, el percentatge d'encerts serà de $100 \cdot \frac{3}{36} = \frac{100}{12}$ que correspon al 8,3 %.

5. 6.

Del problema 6 passa $V = 270\ \text{cm}^3$. L'única manera de posar el 270 com a producte de tres nombres enters més petits que 10 és la següent: $270 = 5{\cdot}6{\cdot}9$. Vist això la superfície exterior inicial de l'ortoedre és $s = 2\cdot(5\cdot6+5\cdot9+6\cdot9)$. La superfície exterior dels 270 cubets unitaris serà $270 \cdot 6$ de la qual quedarà per pintar $270\cdot6-s$. Com que per pintar s hem necessitat un pot de pintura hem de fer una divisió i veurem que necessitarem 5 pots i escaig, és a dir que n'haurem de comprar 6.

6. B. 270°.

Observem un esquema amb desplegaments de les cares de l'ortoedre.



Si analitzem els quadrilàters que es formen en les cares on hi ha els punts P, Q, R veurem que, amb els noms que s'han donat als angles en la figura anterior, es compleix

$$p + a + (180° - c) + 90° = 360°$$
$$q + b + (180° - a) + 90° = 360°$$
$$r + c + (180° - c) + 90° = 360°$$

Si sumem aquestes tres igualtats deduïm que $p + q + r = 270°$.

7. 6847.

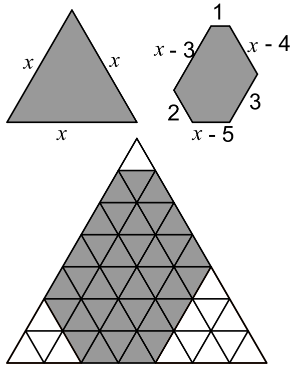
Del problema 1 passa el valor $R = 2419$. Si $2009 + 2419 = 4428$ nombres tenen de mitjana 4428 és que sumen 4428^2. Els 2419 nombres inicials, com que tenen de mitjana 2419 sumen 2419^2. Per tant els 2009 nombres que hem afegit sumen $s = 4428^2 - 2419^2$ i, doncs, tenen de mitjana $\dfrac{s}{2009} = 6847$.

8. Equips d'ESO. $\dfrac{7}{5}$.

Resultat curiós: la raó de les àrees entre les dues figures és igual a la raó entre els seus perímetres!

Si designem com x el costat del triangle inicial el seu perímetre és $3x$; com es mostra a la figura el perímetre de l'hexàgon serà $3x - 6$. Si imposem que la raó entre $3x$ i $3x - 6$ sigui $\dfrac{7}{5}$ resulta $x = 7$.

Tot i que la relació entre les àrees es pot trobar per càlcul, proposem una solució gràfica. Si es descompon el triangle inicial en 49 triangles equilàters de costat 1, això permet comprovar de seguida que la relació d'àrees és $\dfrac{7}{5}$.

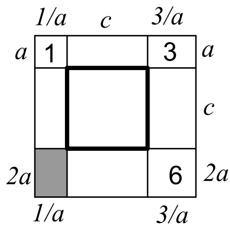


8. Equips d'ESO i Batxillerat. $\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$.

Si a representa un dels costats dels rectangles que tenen àrea coneguda podem obtenir els altres valors indicats a la figura. Si c és el costat del quadrat centrat i C el del quadrat inicial, serà

$$C = \frac{1}{a} + c + \frac{3}{a} = a + c + 2a$$

d'on se'n dedueix $\dfrac{4}{a} = 3a$ i d'aquí $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ i el perímetre buscat és igual a $2 \cdot \left(\dfrac{1}{a} + 2a\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



9. Equips d'ESO. $\frac{2}{9}$.

Si observem les 36 possibilitats (i, j) on i és, el que marca un dau i j el que marca l'altre, i pensem en els possibles quadrats perfectes que podrem escriure (16, 25, 36, 64) veurem que hi ha 8 casos favorables: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3), (6,4), (4,6). La probabilitat demanada és doncs $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

---

9. Equips d'ESO i BTX. 20/27..

Si pensem en els possibilitats que té un jugador per guanyar, que són: guanyar els dos primers sets, guanyar el primer i el tercer o bé guanyar el segon i el tercer tindrem que la probabilitat demanada, que guanyi en Rafael Nadal, és: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$.

---

10. 862.

Passa el valor S=7 del problema 9 i, per tant, hem d'estudiar quina és la màxima quantitat de nombres que podem escollir del conjunt

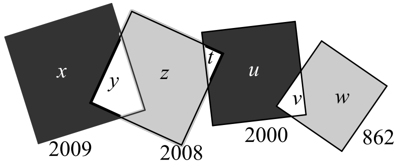
$$C = \{1, 2, 3, ..., 2008, 2009\}$$

de manera que entre els nombres seleccionats no n'hi hagi cap parella que sumi un múltiple de 7. Si classifiquem els nombres de C segons el residu que donen quan els dividim per 7, en tindrem 287 que donen residu 1, 287 que donen residu 2, ..., 287 que són múltiples de 7. Si posem un nombre de residu 1 en el subconjunt dels que escollim, no n'hi podem posar cap de residu 6 i recíprocament, però sí que podem posar-hi tots els d'una mateixa classe: en total 287. El mateix amb els de residu 2 i els de residu 5: en total 287, perquè cap d'aquests sumat amb els anteriors pot donar un múltiple de 7. I semblantment amb els de residu 3 i residu 4. Tenim 287 candidats més a pertànyer a S. I pel que fa als múltiples de 7? No en podrem escollir dos alhora però un únic múltiple de 7 sí que el podem triar, perquè no donarà com a suma un múltiple de 7 si el sumem amb un altre que no ho sigui. Així doncs podem posar triar $3 \cdot 287 + 1 = 862$.

---

11. 1139.

A partir del problema anterior se sap que $A = 862$. Tot i que també es pot donar una solució "explicativa", donem una solució algebraica. Amb les lletres de la figura següent



veiem que es compleixen les equacions $x+y = 2009$, $y+z+t = 2008$, $t+u+v = 2000$, $v+w = 862$ i aleshores, sumant la primera i la tercera equació obtenim $x+y+t+u+v = 4009$ i sumant la segona i la quarta, $y+z+t+v+w = 2870$, i si ara restem aquestes dues, $(x+u)-(z+w) = 4009-2870 = 1139$.

12. 4800 kg.

Del problema 5 passa el valor $N = 6$ tones, és a dir 6000 kg, dels quals el 92%, que són 5520 kg, és aigua i, doncs, 480 kg no són aigua. Aquests 480 kg seran, després del transport, el 10% del total del pes que arriba. Per tant el pes del carregament quan arriba a destinació és 4800 kg.

Problemes a l'esprint

Cicle superior de Primària. Febrer 2009

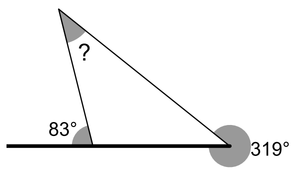
Problemes de la branca d'olivera

1. A la biblioteca de l'escola de l'Anna, en Bertomeu i la Cinta, en l'espai destinat als alumnes del cicle superior, tenen molts llibres. "*Al voltant de dos mil*", els ha dit la mestra i els proposa si encerten quants n'hi ha. L'Anna diu 2009, en Bertomeu 2001 i la Cinta 1982. La mestra els diu que s'han equivocat de 8, d'11 i de 19, però no en aquest ordre. Quants llibres hi ha a la biblioteca, a l'espai del cicle superior?

A) 2017 B) 2012 C) 1993 D) 1990 E) 2020

2. L'Enric té un rellotge digital que marca hores minuts i segons, sempre amb sis xifres. Per exemple, es veu **00:00:00** a mitjanit; **08:57:35** a l'hora que avui ha arribat a l'escola; **12:00:00** al migdia; **20:09:07** al moment que ahir va començar a sopar. Quantes vegades, al llarg de tot un dia, canvien alhora totes les xifres de la pantalla del rellotge digital de l'Enric?

3. A la figura es pot veure la mesura de dos angles, un de 83° i un altre de 319°. Quina és la mesura en graus de l'angle marcat amb un signe d'interrogació?

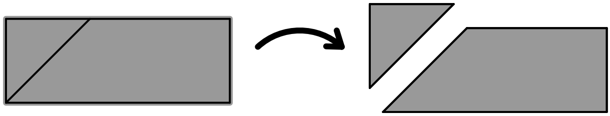


Atenció: La figura només és un esquema del que es demana; no està dibuixada amb precisió. No us demanem que mesureu sinó que raoneu.

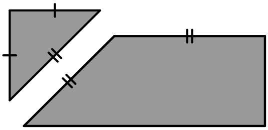
A) 38° B) 42° C) 46° D) 58° E) 62°

La solució d'aquest problema s'ha de passar com a dada al problema 9.

4. La Diana retalla un rectangle en dues peces, així:

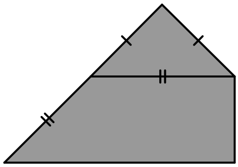


Ho ha pogut fer de manera que els costats que veieu marcats amb un traç són iguals entre ells, de la mateixa distància, i els que marquem amb dos traços, també.



La Diana ja sap que potser algunes d'aquestes distàncies són iguals a algunes de les que no estan marcades. Ara us demanem que esbrineu quants polígons diferents pot compondre la Diana amb les dues peces de manera que s'enganxin dos costats de la mateixa mida.

Tot seguit podeu veure una de les possibilitats que té la Diana de compondre un nou polígon tal com es demana, però, **atenció!** Vosaltres heu d'estudiar quantes són **totes les maneres**, incloent-hi el rectangle inicial i el polígon de l'exemple.



La solució d'aquest problema s'ha de passar com a dada al primer repte, el problema 8.

Problemes del colom de la pau

5. Potser podem dir que 2009 és un nombre com qualsevol altre. Però adoneu-vos que té la propietat que les dues xifres centrals són iguals i que les dels extrems sumen 11. Quants nombres de quatre xifres compleixen aquesta propietat ?

6. Un estudi geològic arriba a la conclusió que l'estalactita més gran d'una cova s'allarga 1 metre cada 1000 anys. Pensa quants mm s'allarga cada any i després estudia quina de les opcions de resposta que et proposem indica més aproximadament quant creix l'estalactita cada dia.

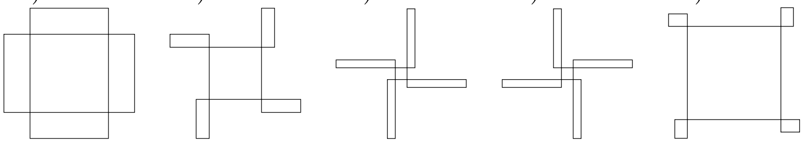
A) 0,0003 mm B) 0,003 mm C) 0,03 mm D) 0,3 mm E) 3 mm

7. Un robot mecànic està programat amb els comandaments següents:

(*) Avança 2 unitats
Gira a la dreta 90°
Avança 15 unitats
Gira a la dreta 90°
Avança 20 unitats
Gira a la dreta 90°
Torna a repetir des de (*)

Quin dels esquemes següents representa el camí que seguirà el robot si va obeint les instruccions sense parar?

A) B) C) D) E)

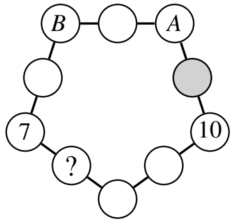


D'acord amb la resposta d'aquest problema cal passar un número al problema 8. Si és A, passa 1, si és B, 2; si és C, 3; si és D, 4; si és E, 5.

Reptes finals

Per poder resoldre completament el problema 8 cal saber els nombres que passen dels problemes 4 i 7.

8. En l'esquema pentagonal següent hem de situar-hi els nombres de l'1 al 10, cada nombre en un cercle diferent, de manera que cada grup de tres nombres situats en línia han de sumar exactament el mateix. Al cercle A hi heu de posar el nombre que passa del problema 4 i al cercle B hi heu de posar el nombre que passa del problema 7.

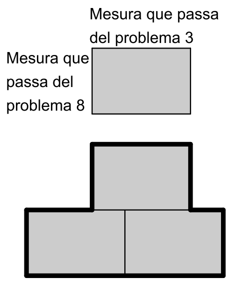


Penseu primer de tot quin nombre pot anar al cercle marcat de color gris i deduïu quant sumaran cada tres cercles en línia si es compleix la propietat que ens diu l'enunciat. Ara bé el que us preguntem és quin nombre s'ha de posar a la casella amb el signe d'interrogació.

Heu de passar al problema següent el valor comú de la suma dels nombres de cada tres cercles en línia.

Per resoldre el problema 9 cal saber un nombre que passa del problema anterior i un del problema 3.

9. La Yasmina té tres peces rectangulars iguals. Uns dels costats del rectangle tenen com a longitud el nombre que passa del problema 3 (la mesura d'un angle sense indicar els °) i els altres costats mesuren el nombre que passa del problema anterior (suma dels nombres de tres cercles en línia). La Yasmina col·loca les peces com indica l'esquema de la figura de la dreta (que heu d'entendre com això, com un esquema, no pas com un dibuix fet a escala) i aleshores envolta les peces amb una cinta gruixuda. Fet això s'adona que, posi on posi la peça de dalt, sempre necessita la mateixa quantitat de cinta. Quants cm de cinta necessita?



Per si teniu temps: reptes voluntaris

Necessiteu recordar la solució del problema 1.

10. A la biblioteca de l'escola, a l'espai del cicle superior, entre els llibres dedicats a cinquè i els que estan dedicats a sisè, hi ha tants llibres com ha descobert la mainada que feia el problema 1. Avui ha arribat una nova remesa de llibres per a aquest espai de la biblioteca. Si sumem la quantitat de llibres de l'espai de sisè amb els que han arribat resulta un total de 1540. En canvi si sumem la quantitat de llibres de cinquè amb els que han arribat trobem un resultat de 1330. Quants llibres hi haurà a l'espai del cicle superior de la biblioteca de l'escola quan la remesa de llibres nous estiguin classificats?

11. La Joana, la Maria, la Sara i en Tomàs es volen repartir els caramels que hi ha en una bossa. Primer n'agafen 8 cadascú. Després tornen a fer el mateix. I encara ho fan una altra vegada. Però quan proven de tornar-ho a fer resulta que la Joana, la Maria i la Sara sí que tenen 8 caramels per a cada una però en canvi a en Tomàs li han quedat caramels, però menys de 8, i per això en tindria menys que les seves amigues. Després de veure el nombre de que caramels li han quedat a en Tomàs cada una de les tres nenes dóna algun caramel a en Tomàs, totes tres el mateix nombre, i així finalment queda tothom amb el mateix nombre de caramels. Quants caramels hi havia al paquet abans de començar el repartiment?

Problemes a l'esprint

Cicle superior de primària. Febrer 2009

Participació i centres destacats

En la VIII edició de l'activitat **Problemes a l'esprint** per a equips formats per alumnes del cicle superior de primària, celebrada el 17 de febrer de 2009 van participat un total de 25 equips de 23 centres, un de les Illes Balears, un de la Comunitat Valenciana i tots els altres, de Catalunya. Van enviar totes les respostes correctes un total de 14 equips.

En aquesta convocatòria es van introduir variants en el desenvolupament de l'activitat: menys problemes "per al concurs" i uns reptes voluntaris per si algun centre hi volia dedicar més temps, idees de les quals la comissió en va rebre opinions favorables i per aquesta raó ja es van incorporar a edicions posteriors.

Centres més destacats

- CEIP Gayarre (Barcelona), 2003 segons,
  centre guanyador de l'activitat
- Col·legi Cor de Maria (Valls), 2448 segons
- CEIP Municipal La Sínia (Cerdanyola del Vallès), 2812 segons

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

CEIP Francesc Burniol (Argentona)
Joan Pelegrí (Barcelona)
MM. Concepcionistes (Barcelona)
Col·legi Jardí (Granollers)
CEIP Jaume I (Llívia)
CP Marian Aguiló (Palma de Mallorca)
CEIP Aurora (Sant Boi de Lluçanès)
Sagrat Cor de Jesús (Súria)
Col·legi Sant Pau Apòstol (Tarragona, dos equips)
CEIP Dr. Fortià Solà (Torelló)
CEIP Andersen (Vic)

Problemes a l'esprint

Cicle superior de primària. Febrer 2009

Les solucions

1. D. 1990.

Observem que la diferència entre els nombres que han dit en Bertomeu i la Cinta és 19. Aleshores si el nombre vertader de llibres fos més gran que els 2001 que ha dit en Bertomeu o els 1982 que ha dit la Cinta algú s'hauria equivocat de més de 19 . Com que cap dels tres ho ha encertat deduïm que el nombre de llibres ha d'estar entre 2001 i 1982 i per això en Bertomeu i la Cinta seran els que s'han equivocat de 8 i d'11, potser no en aquest ordre i, com a conseqüència l'Anna és la que s'ha equivocat de 19. Hi ha 1990 llibres.

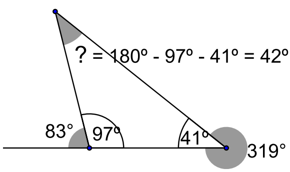
És clar que, com que el problema es plantejava amb opcions de resposta, no calia fer un raonament tan acurat. Si provàvem cada possible resposta veiem que 1990 era l'única resposta correcta. L'Anna s'ha equivocat de $2009 - 1190 = 19$, en Bertomeu de $2001 - 1990 = 11$ i, finalment, l'error de la Cinta és de $1990 - 1982 = 8$.

2. 3 vegades.

És clar que, perquè passi el que diu l'enunciat ha de ser en el moment que s'arriba a una hora en punt per a la qual canviïn les dues xifres de l'hora. I això passa de les 23 a les 00 (el rellotge passa de 23:59:59 a 00:00:00), de les 09 a les 10 (el rellotge passa de 09:59:59 a 10:00:00) i de les 19 a les 20 (el rellotge passa de 19:59:59 a 20:00:00).

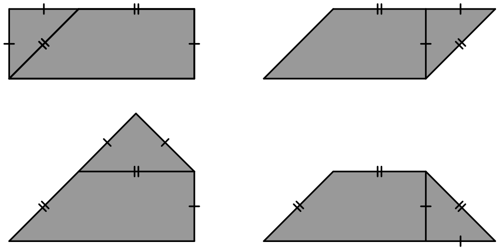
3. B. 42°.

Deduïm el valor de l'angle de 41° de la figura mirant quant li falta al de 319° per arribar a 360°. Trobem el de 97° perquè és el que li falta a 83° per arribar a 180°. Finalment l'angle demanat el calculem a partir del fet que els angles d'un triangle sumen 180°.



4. 4.

Hi ha 4 possibles polígons que es mostren a les figures, on s'ha marcat un altre costat no assenyalat a l'enunciat que té la mateixa mesura que els que estan marcats amb un traç.



5. 80.

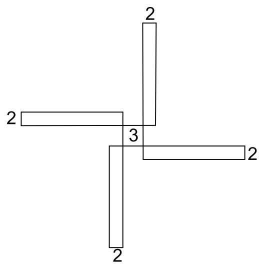
Les xifres centrals podran ser 00, 11, ..., 99; en total 10 possibilitats. Les dels extrems podran ser 2 amb 9 (2 - - 9 o bé 9 - - 2), 3 amb 8 (3 - - 8 o bé 8 - - 3), 4 amb 7 (4 - - 7 o bé 7 - - 4) o bé 5 amb 6 (5 - - 6 o bé 6 - - 5); en total 8 possibilitats. Com que cada una de les 10 possibilitats es pot combinar amb cada una de les altres 8, en total tenim $10 \cdot 8$ nombres que compleixen l'enunciat.

6. B. 0,003 mm.

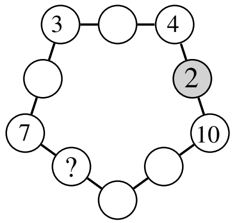
1 metre cada 1000 anys són 1000 mm cada 1000 anys és a dir, 1 mm cada any. Si dividim 1 mm per 365 el resultat aproximat és 0,003 mm.

7. C.

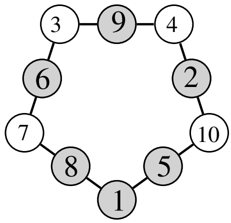
Si es dibuixa el camí que seguirà el robot quan repeteixi una vegada i una altra les instruccions *avança 2, gira a la dreta, avança 15, gira a la dreta, avança 20, gira a la dreta i torna a començar*, parant molta atenció al fet que cal *girar a la dreta* pensant quin és el sentit de la marxa en cada moment, es comprova que l'itinerari és el de la figura de la dreta, que començarà en un dels segments indicats amb un 2. Vegeu que el quadrat central és de 3 unitats de costat.



8. A ? hi va el 8; la suma comuna és 16.



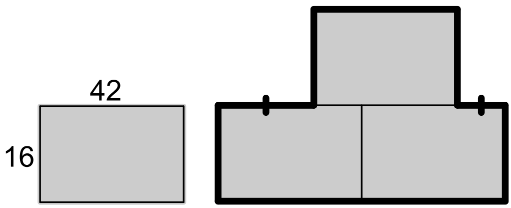
La figura incorpora les dades que passen de problemes anteriors i, tal com es suggereix, primer de tot hem mirat quin nombre va al cercle gris. Com que no hi poden anar ni el 3 ni el 4 per no repetir-se, veiem que hi ha d'anar un nombre petit (1 o 2) perquè si hi poséssim 5 o més no podríem arribar a la mateixa suma al costat de dalt. Si pensem que hi posem l'1 la suma seria 15 i no podríem assolir-la, sense repetir cap xifra, al costat de baix a la dreta, on ja hi tenim un 10. Per tant al cercle gris hi va un 2 i la suma comuna és 16.



A la figura de la dreta ja es pot veure l'esquema amb tots els nombres posats. Després de situar el 2 com hem comentat, de seguida es poden posar el 9 i el 6. Aleshores veiem que ens queden l'1, el 5 i el 8 per als tres cercles inferiors i constatem que l'1 només pot anar al cercle de baix de tot, comú a dos costats. I així ja podem acabar de posar tots els nombres.

9. 232.

La Yasmina s'adona que entre els dos trossos de cinta assenyalats amb un traç fan el mateix que un dels costats grans dels rectangles. Vist això, ja sap que el total de la cinta és el mateix que quatre costats grans més quatre costats petits i així troba el resultat: $4 \times (16 + 42) = 232$.



10. 2430.

Si fem servir el resultat del problema 1 tindrem que entre els llibres dedicats a cinquè i els que estan dedicats a sisè, n'hi ha 1990. L'enunciat diu que entre els llibres de sisè i els que han arribat són 1540 i també que la suma dels de cinquè més els que han arribat dóna 1330. Si sumem $1990 + 1540 + 1330 = 4860$ haurem comptat exactament dues vegades tots els llibres. Per tant el nombre total de llibres que hi haurà és $\dfrac{4860}{2} = 2430$.

11. 124.

Comencem pel final i pensem quants caramels pot haver donat cada nena a en Tomàs per quedar-se amb el mateix nombre. Si dels 8 que han agafat l'última vegada cada nena en donés 1 a en Tomàs, elles es quedarien amb 7. Per quedar-se també finalment amb 7, com que n'hi donen 3, en Tomàs hauria d'haver-ne trobat 4 a la bossa, cosa possible. Pensem ara si és possible que cada nena en donés 2 a en Tomàs; elles es quedarien amb 6 i entre totes tres n'hi donen 6 a en Tomàs que, per quedar-se també finalment amb 6, hauria hagut de passar que no en trobés cap a la bossa però l'enunciat diu que sí que hi havia trobat caramels. No podem pensar que, dels 8 qaue han agafat l'última vegada, cada nena doni 3 o més caramels a en Tomàs perquè aleshores segur que ell en tindria més que cada una d'elles.

Vist això, el total de caramels que hi havia a la bossa és: $3 \times (8+8+8+8)$ que agafen les tres primeres voltes, als quals hem de sumar els $8+8+8+4$ que hem deduït que era l'única possibilitat per a l'última volta de la recollida de caramels.

Problemes a l'esprint

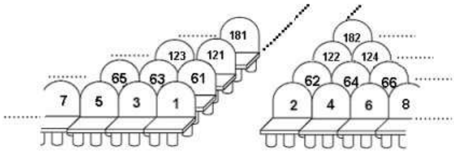
Primer cicle d'ESO. Març 2009

Problemes de la branca d'olivera

1. La Maria té una botiga de queviures. Ahir va comprar 50 quilos de taronges a 0,50 € el quilo i de seguida les va posar a la venda a 1 € el quilo i en va vendre 30 quilos. Al vespre se'n va emportar 5 quilos per a ella. Avui volia acabar-les de vendre i per això ha fet una oferta de *emporti-se'n 3 i pagui'n 2*, és a dir que cadascú que compra 3 quilos, només en paga 2. Tothom que ha anat a comprar taronges ha aprofitat l'oferta i així la Maria ha aconseguit vendre totes les taronges. Quants euros de benefici ha obtingut la Maria en la venda de les taronges?
(Nota: El benefici vol dir la diferència entre els diners que ha obtingut de la venda menys els que s'havia gastat per comprar les taronges)

La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 7 com a nombre Q.

2. En un auditori molt gran les butaques estan col·locades en files, totes amb el mateix nombre de butaques a un costat i l'altre del corredor central, que és ample com dues butaques. Les butaques de l'esquerra (mirant des de l'escenari) estan numerades correlativament amb els nombres imparells i les de la dreta amb els nombres parells, com es mostra a la figura.



L'Anna ha comprat una entrada pel proper espectacle i li han donat el número 2009. La seva amiga Imma ha decidit que també vol anar-hi i li han ofert les entrades amb els números que es poden veure a les opcions de resposta. Quina entrada triarà l'Imma si vol estar al més a prop possible de l'Anna?

A) 2010 B) 1999 C) 2063 D) 1947 E) 1929

3. En una carretera hi ha set poblacions, que designarem com **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** i **G**, que es troben en aquest ordre seguint la carretera, que és l'única que uneix aquestes poblacions.

En Joan tenia una taula amb les distàncies en quilòmetres entre cada parella d'aquestes poblacions, però se li han esborrat bona part de les dades de la taula i per això ara només hi consten 6 d'aquestes distàncies.

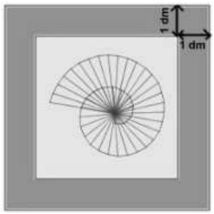
(Per exemple veu que des de B fins a E hi ha 27 quilòmetres i des de B fins a G, 48 quilòmetres.)

A						
	B					
		C				
19			D			
	27			E		
47		34			F	
	48		37			G

Podries ajudar en Joan i dir-li quina és la distància en quilòmetres que hi ha entre les poblacions **A** i **G**?

Per resoldre aquest problema cal saber un nombre M que passa del problema 5.

4. La Joana ha pintat un quadre en un llenç quadrat i l'ha emmarcat amb un marc d'1 dm d'ample. Ha necessitat tants dm^2 de fusta per fer el marc com indica el nombre M que us passen del problema 5. Quina és l'àrea, expressada en dm^2, del llenç on hi ha la pintura?



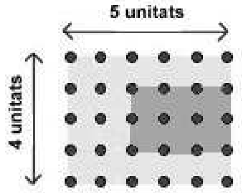
El resultat d'aquest problema (sense unitats) passa al primer repte, problema 9, com a nombre S.

Problemes del colom de la pau

5. L'Antoni volia escriure tots els números de l'1 al 2009, un després de l'altre, però s'ha cansat i només ha escrit fins al 209. Aleshores pensa un moment i dedueix ràpidament que la xifra que ha escrit més és l'1. Ara us demanem a vosaltres que penseu quina és la xifra que ha escrit menys vegades i que calculeu quantes vegades l'ha escrit.

La solució passa al problema 4 com a nombre M.

6. Observeu a la figura de la dreta que si construïm un geoplà en un rectangle de dimensions 5×4 hi ha 30 punts. En el geoplà de la figura hem marcat un rectangle de mides 3×2 que podeu veure que, comptant totes els punts que hi pertanyen (els del perímetre i els interiors) abasta 12 punts.



Ara imagineu un geoplà en un rectangle de dimensions 50×42.
En aquest geoplà volem marcar un rectangle que abasti 2009 punts (comptant tots els que hi pertanyen: els del perímetre i els interiors).
En quantes posicions diferents podem situar el vèrtex inferior esquerre d'aquest rectangle?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

Per aquest problema es necessita un nombre Q, que passa del problema 1.

7. En Ventura, un dia que per obres no hi ha trens, ha decidit anar en cotxe de casa a la feina. Quan es troba justament a mig camí s'adona que la llumeta que marca el nivell de gasolina se li encén intermitentment i que per tant s'està quedant sense gasolina. Com que sap on és la gasolinera més propera, situada exactament a la meitat del trajecte que ja ha recorregut, torna un tros enrera per posar gasolina. Després d'omplir el dipòsit, posa el comptaquilòmetres a zero i aleshores ja va ràpidament cap a la feina. Quan hi arriba, constata que el comptador indica tants quilòmetres com el valor Q que us passen del problema 1. Quants quilòmetres ha de recórrer en Ventura per anar directament de casa a la feina?

---

8. Imagineu que tenim un paper rectangular i que fem les dues accions següents:
(1) el partim per la meitat per un tall paral·lel a un dels costats.
(2) agafem un dels dos rectangles que hem obtingut i el tornem a tallar per la meitat, paral·lelament a un dels costats.
Hi ha tres rectangles diferents que després d'aplicar-los aquestes dues accions donen com a resultat final rectangles de 6 cm $\times$ 4 cm. Naturalment tots els rectangles amb aquesta propietat tenen inicialment una superfície de 96 cm^2 però, de tots ells, quants cm de perímetre té el que té perímetre màxim?

El resultat d'aquest problema (sense unitats) passa al primer repte, problema 9, com a nombre T.

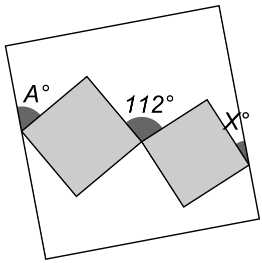
Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica d'aquest problema cal saber les respostes dels problemes 4 (S) i 8 (T).

9. La Clara ha escrit quatre nombres diferents a la pissarra. En David escull tres d'aquests nombres, els suma, i li dóna S. L'Elena també escull tres dels quatre nombres, els suma, i li dóna T. En Francesc fa el mateix, escull tres dels quatre nombres i els suma, i obté 88. També ho fa la Gisela i obté 84. És clar que cadascú ha escollit els tres nombres de maneres diferents, i ja ho han fet de totes les maneres possibles. Quin és el nombre més gran que ha escrit la Clara?

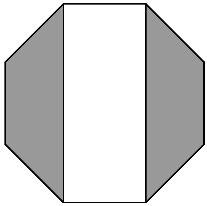
La solució d'aquest problema passa al següent com a angle A.

10. A l'interior d'un rectangle hi hem situat dos quadrats que tenen un vèrtex comú i cada quadrat té un altre vèrtex en un costat del rectangle. A la figura (que només heu de prendre com un esquema; els angles no hi són pas dibuixats amb correcció) s'indica la mesura de dos angles, un de $A°$ on A és el nombre que passa del repte anterior i l'altre de $112°$. Quina és la mesura en graus de l'angle indicat com $X°$ a la figura?



Per si teniu temps: reptes voluntaris

11. En l'octàgon regular de la figura (tots els costats i tots els angles són iguals), quin percentatge de la superfície total hem acolorit?



12. Volem posar en una fila 25 boles blanques, 14 boles grises i 10 boles negres de manera que no quedin dues boles del mateix color una al costat de l'altra. A quina conclusió de les següents arribarem amb seguretat?

A) No podrem col·locar les boles en fila tal com indica l'enunciat
B) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà una bola gris al costat d'una bola negra
C) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà alguna bola blanca que té les dues veïnes negres
D) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà com a mínim 3 boles blanques que tenen cada una dues veïnes grises, però ho podem fer sense que això passi per a 4 boles blanques
E) Sí que ho podrem fer i segur que hi haurà com a mínim 4 boles blanques que tenen les dues veïnes grises

Problemes a l'esprint

Primer cicle d'ESO. Març 2009

Participació i centres destacats

En la VIII edició de l'activitat **Problemes a l'esprint** per a equips del primer cicle de l'ESO es va aconseguir un rècord de participació, amb un total de 69 equips de 67 centres, un de Menorca, a les Illes Balears, 9 de la Comunitat Valenciana i tots els altres, de Catalunya. Van enviar totes les respostes correctes un total de 27 equips.

Atenent a l'elevada participació i al nivell assolit en l'encert de les respostes, la comissió organitzadora va decidir convidar quatre centres d'aquesta convocatòria a l'acte d'entrega de premis.

Centres més destacats

- Col·legi Cor de Maria de Valls, 2792 segons
  centre guanyador de l'activitat
- IES Arquitecte Manuel Raspall de Cardedeu, 3225 segons
- IES Samuel Gili i Gaya de Lleida, 3443 segons. segons
- IES Les Corts de Barcelona, 3624 segons. segons

Altres centres amb encert ple amb menys d'una hora i un quart
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

IES Montserrat de Barcelona
IES Pere Fontdevila de Gironella
Col·legi Regina Carmeli de Rubí
IES Sabadell de Sabadell

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

IES d'Albal (Albal)
IES Rafel de Campalans (Anglès)
IES Badalona VII (Badalona)
Els Arcs (Barcelona)
IES Ernest Lluch (Barcelona)
Joan Pelegrí (Barcelona)
SES Comas i Solà (Barcelona)
IES Guillem de Berguedà (Berga)
IES Sos Baynat (Castelló)
IES Vicent Castell (Castelló)
IES Joanot Martorell (Esplugues de Llobregat)
IES Olivar Gran (Figueres)
IES Santa Eugènia (Girona)
IES Vicens Vives (Girona)
IES El Pedró (L'Escala)
IES Montserrat Miró (Montcada i Reixac)
IES Montsacopa (Olot)
IES Marta Mata (Salou)
IES Torre Roja (Viladecans)

Problemes a l'esprint

Primer cicle d'ESO. Març 2009

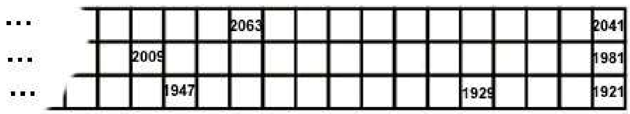
Les solucions

1. 15.

La Maria ha gastat $50 \times 0{,}5 = 25$ € . El primer dia ingressa 30 € pels 30 kg que ven. Com que s'enduu per a ella 5 kg, n'hi queden 15 per vendre que són cinc lots de 3 kg que ven a 2 € cada un.
En total, doncs, ingressa 10 € més. Benefici: $30 + 10 - 25 = 15$ €.

2. D. 1947.

Es pot veure a la figura que en cada fila hi ha 60 butaques. Si dividim 2009 entre 60 veurem que les 33 primeres files abasten del número 1 al 1980. A la fila següent, a l'esquerra hi haurà el 1981, 1983, 1985,...., 2005, 2007, 2009, (a la butaca 15a), etc... El 2010 estarà a la mateixa fila però a la quinzena butaca de la dreta, molt lluny! Si fem el mateix amb cada una de les entrades proposades (una divisió) veurem que l'esquema és:



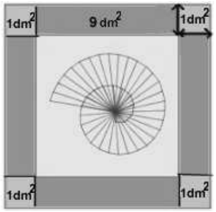
i queda clar, doncs, que l'entrada que queda més a prop de la 2009 és la 1947.

3. 56.

Amb dues dades que estiguin a la mateixa fila o dues dades que estiguin a la mateixa columna se'n pot deduir una altra. I així, amb paciència, podríem anar omplint tota la taula, però això no és pas el que es demana. Si parem atenció veurem que sabem la distància de **A** a **D** (19 km) i la de **D** a **G** (37 km) i, doncs, la distància de **A** a **G** és 19 + 37 = 56 km.

4. 81.

Si mirem bé la figura veurem que a les cantonades del marc tenim quatre quadrats de 1 cm^2 cadascun. Amb això queden 36 cm^2 a repartir entre quatre rectangles iguals i, per tant, cada un d'aquests rectangles tindrà 9 cm^2. Com que un dels costats fa 1 cm, l'altre farà 9 cm. Però aquest altre és el costat del llenç quadrat on hi ha la pintura. Per tant l'àrea demanada és $9 \times 9 = 81$ cm^2.

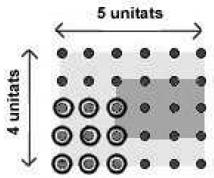


5. 40.

Com que en els nombres d'una xifra podríem dir que és "com si hi faltés el 0 inicial" es dedueix que el 0 és la xifra que ha aparegut menys vegades. Quants zeros hi ha? De l'1 al 99 només els de les desenes: 9, i igualment del 110 al 190, 9 zeros més. Del 100 al 109 hi ha 11 zeros més i igualment del 200 al 209. Tot plegat $2 \times 9 + 2 \times 11 = 40$ zeros.

6. E. 9.

Si preguntéssim en quantes posicions podríem posar el rectangle acolorit més fosc, sense girar-lo, en el geoplà de la figura que es donava com a exemple quina seria la resposta? Segur que veieu que hi ha 9 possibles punts per al vèrtex inferior esquerre. En aquest cas estaríem col·locant un rectangle que abasta 12 punts i té dimensions 3×2 en un rectangle de dimensions 5×4.



Perquè en el nostre gran geoplà de 50×42 un rectangle abasti 2009 punts han de ser 49 columnes de 41 punts cada una, cosa que correspon a un rectangle de 48×40.
Si imagineu la figura engrandida cap a la dreta i cap amunt veureu que també en aquest cas hi ha 9 possibles punts per al vèrtex inferior esquerre.

7. 20.

Si en Ventura ha recorregut la meitat del trajecte i torna enrere la meitat del que ja havia recorregut (és a dir, un quart) haurà de fer tres quartes parts del trajecte per arribar a la feina. Si $\frac{3}{4}$ de la distància total de casa a la feina són 15 km, es calcula de seguida que la dustància total són 20 km.

8. 56 cm.

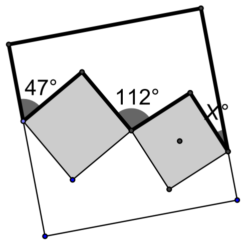
El rectangle de 6 cm $\times$ 4 cm pot ser el resultat, mitjançant el procediment indicat a l'enunciat, d'un rectangle de 12 cm $\times$ 4 cm o bé d'un altre de 6 cm $\times$ 8 cm. El primer d'aquests pot ser el resultat de partir per la meitat un rectangle de 24 cm $\times$ 4 cm o un de 12 cm $\times$ 8 cm i el segon pot provenir també d'un de 12 cm $\times$ 8 cm o d'un altre de 6 cm $\times$ 16 cm. Ja hem trobat els tres rectangles que deia l'enunciat. Es pot comprovar que el que té el perímetre màxim dels tres és el de 24 cm $\times$ 4 cm, que té un perímetre de 56 cm.

9. 47.

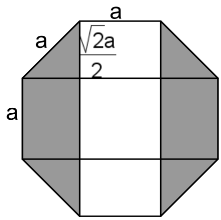
Si anotem els resultats que passen d'altres problemes i aleshores fem la suma dels resultats de les sumes parcials de tres en tres, que són 81 la d'en David, 56 la de l'Elena, 88 la d'en Francesc i 84 la de la Gisela, obtindrem $81 + 56 + 88 + 84 = 309$ i, de fet, haurem sumat tres vegades cada un dels nombres que ha escrit la Clara. Per tant els quatre nombres sumen $\frac{309}{3} = 103$. Per altra banda és segur que l'Elena, que ha obtingut el resultat més petit serà la que no ha sumat el nombre més gran. Per tant el nombre més gran és $103 - 56 = 47$.

10. 21°.

Observeu l'heptàgon que s'ha ressaltat a la figura. En aquest heptàgon hi ha dos angles de 90°, dos de 270°, un de 47°, un de 112° i el que ens demanen. Com que la suma dels angles interiors d'un heptàgon és $5 \cdot 180° = 900°$ es dedueix de seguida que l'angle que ens falta és de 21°.

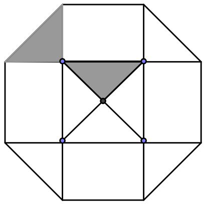


11. El 50%.



Si ho volem fer per càlcul, primer de tot podem descompondre cadascun dels trapezis acolorits en un rectangle i dos triangles isòsceles rectangles. Si a és la longitud del costat de l'octàgon, el teorema de Pitàgores ens diu que els catets d'aquests triangles fan $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. L'àrea del rectangle blanc és $a \cdot (a + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2}) = (1 + \sqrt{2})a^2$. Si calculem l'àrea d'un dels trapezis, tenint en compte que les bases són $a+2\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}$ i a i l'altura $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ i tenim en compte que hi ha dos trapezis acolorits veurem que l'àrea acolorida és la mateixa que l'àrea blanca.

Tanmateix la segona figura ens mostra una manera geomètrica de raonar-ho. A partir del fet que els dos triangles ressaltats en aquesta figura són iguals es constata ràpidament per composició de figures el mateix resultat al qual hem arribat per càlcul.



12. D.

Per poder fer el que indica l'enunciat, les 25 boles blanques hauran de posar-se separades i deixaran entre elles 24 "forats" que haurem d'omplir amb gris (G) i negre (N). Si dues boles G queden en dos forats consecutius la bola blanca que hi ha en mig tindrà dues veïnes G. Per valorar les opcions D) i E) haurem de procurar alternar en els forats bola G i bola N. Si comencem posant en els forats G N G N ... quedaran 4 boles G que ompliran els quatre darrers forats. És clar que no poden quedar menys de 4 boles G en forats consecutius. Ara bé, aquestes quatre boles G deixen entre elles només 3 boles B.

L'esquema de la solució és
B G B N B G B N B G B N ..... B N B G B N B G <u>*B*</u> G <u>*B*</u> G <u>*B*</u> G B
on s'han destacat les úniques tres boles B que tenen dues veïnes G.

Problemes a l'esprint

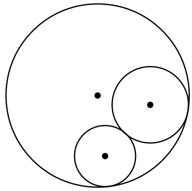
Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Problemes de la branca d'olivera

1. La professora ha proposat la divisió d'un nombre natural N per 2009. L'Albert ha dit: *Mireu, el residu de la divisió és una unitat més gran que el quocient.* La Berta comenta encertadament: *És que el nombre N és el més gran que compleix aquesta propietat que ha esmentat l'Albert.*
Quant sumen les xifres de N?

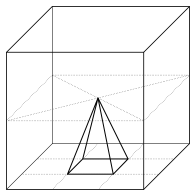
La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 5 com a nombre E.

2. La figura mostra tres cercles de radis 12, 5 i 4, tangents dos a dos. Quin és el perímetre del triangle definit pels centres dels tres cercles?



Per resoldre el problema 3 cal conèixer un nombre A que us han de passar del problema 5. Tanmateix, sense aquest valor ja podeu anar pensant el problema!

3. A dintre d'un cub d'aresta A cm hi hem situat una piràmide quadrangular, que té la base recolzada en una de les cares del cub per la part interior. Les dimensions comparades del cub i la piràmide es poden observar a la figura, on també es veu que per construir la piràmide hem dividit els costats de la base del quadrat en tres parts iguals i les arestes verticals en dues parts iguals. Quin és el volum de la piràmide?



A) 12 cm^3 B) 9 cm^3 C) 8 cm^3 D) 6 cm^3 E) 4 cm^3

4. En una població de rates el 25% són blanques i el 75%, negres. La meitat de les rates blanques i la cinquena part de les rates negres tenen la cua llarga. Sabem que hi ha 99 rates amb la cua llarga. Quantes rates hi ha a la població?

Problemes del colom de la pau

Per resoldre el problema 5 cal conèixer un nombre E que us han de passar del problema 1. Tanmateix sense aquest valor ja podeu anar pensant el problema!

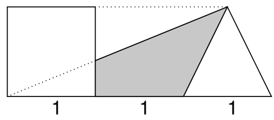
5. Una família va anar de viatge als EUA i, en aquella època, la taxa de canvi feia que per cada E euros els donessin 26 dòlars. Quan havien gastat 2009 dòlars es van adonar que els quedaven encara exactament tants dòlars com euros havien canviat. Quants dòlars havien rebut quan van fer el canvi de divises?

La xifra de les desenes de la solució d'aquest cinquè problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre A.

6. A l'Anna l'han convidada a una festa d'aniversari a la qual hi assisteixen 12 persones, ella inclosa, i només coneix a una altra de les persones que s'han aplegat. En Lluís, un altre dels assistents, només en coneix dues. La tercera assistent, la Joana, en coneix tres. I així successivament, de manera que es poden ordenar onze de les persones convidades de manera que cada una coneix una persona més que l'anterior, i així fins arribar a la persona número 11 que coneix a tots els assistents. Quantes persones coneix el dotzè i darrer convidat?

Heu de suposar que si una persona X en coneix una altra, Y, aleshores la persona Y coneix X.

7. Equips d'ESO. A la figura podeu veure un quadrat de costat 1 i un triangle isòsceles de base 1 i altura 1. Un costat del quadrat i un costat del triangle isòsceles estan situats sobre una recta i la distància entre els dos vèrtexs més propers també és 1. Quina és la mesura, en unitats quadrades, de l'àrea ombrejada?



A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{9}{10}$ D) 1 E) Més de 1

7. Equips d'ESO i BTX. Suposat que a, b, c són nombres reals positius que compleixen $a^2 = b^2 + c^2$, busca l'expressió simplificada de

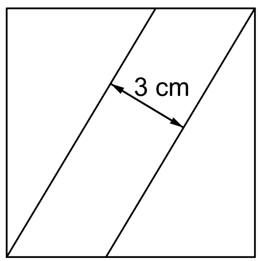
$$\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)}$$

A) $\dfrac{bc}{2}$ B) $\dfrac{bc}{\sqrt{2}}$ C) bc D) $\sqrt{2}bc$ E) $2bc$

8. Equips d'ESO. L'Anna ha construït una successió que comença amb els números 59, 99, 209. A partir d'aquí escriu nombres successivament cadascun dels quals és el resultat de restar el nombre que fins aleshores és l'últim de la llista de la suma dels dos anteriors a aquest. Per exemple el quart terme és $59 + 99 - 209 = -51$ i el cinquè és $99 + 209 - (-51) = 359$. L'Anna veu que un dels termes de la successió és 2009. En quin lloc de la successió apareix el número 2009?

La solució passa al problema 9 com a nombre N.

8. Equips d'ESO i BTX. La figura, (que no està feta a escala, només és un esquema) mostra un quadrat i dues rectes paral·leles que s'han traçat des de dos vèrtexs oposats del quadrat, situades a una distància de 3 cm. Si amb aquesta construcció el quadrat ha quedat dividit en tres parts de la mateixa superfície, quina és l'àrea del quadrat?



La solució passa al problema 9 com a nombre N.

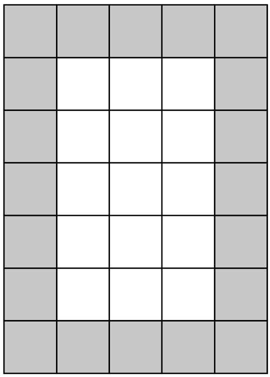
Reptes finals

Tant si l'equip és d'ESO com si és conjunt ESO/BTX, per resoldre el problema 9 cal conèixer un nombre N que us han de passar del problema 8. Tanmateix sense aquest valor ja podeu anar pensant el problema!

9. Equips d'ESO. En una bossa hi ha 1000 boles, numerades de l'1 al 1000. Quantes boles d'aquesta bossa tenen un nombre que és múltiple de N o de $N-3$?
(és clar que cal comptar només una vegada els nombres que són múltiples de tots dos alhora)

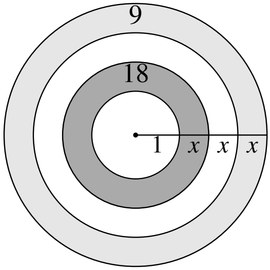
9. Equips d'ESO i BTX. Els set nans tenen cada un una samarreta amb un número de l'1 al 7. Cada dia la Blancaneus el fa posar l'un al costat de l'altre i així veu un nombre de set xifres. Ara bé, ho ha de fer amb la condició que els nans amb les samarretes 1 i 2 quedin sempre junts i en canvi els que tenen les samarretes 6 i 7 quedin sempre separats. Si ordenem en ordre creixent tots els nombres diferents de set xifres que pot veure la Blancaneus, quin queda en el lloc n^2 on n és el divisor primer més gran del nombre N que us han passat?

10. En Joan té moltes peces quadrades, blanques, i la Joana moltes de grises, totes de la mateixa mida. Amb aquestes peces volen compondre un rectangle que tingui peces blanques a l'interior i peces grises a les vores, com succeeix a la figura de la dreta. En un cert moment (que no correspon pas a la figura, on hi ha 15 peces blanques i 20 de grises) la Joana diu: *Mira, hem aconseguit compondre el rectangle més gros possible amb el mateix nombre de peces blanques que grises!*. Quantes peces han posat en total la Joana i en Joan?



Reptes voluntaris

11. En Pere i la Teresa estan dissenyant una diana. Han decidit que el cercle central tindrà 1 unitat de radi i, al seu voltant, hi haurà tres corones circulars de la mateixa amplada i que assignaran les puntuacions de cada zona de manera inversament proporcional a les àrees respectives. Quan ja han dibuixat la diana la Teresa s'adona que l'àrea de la zona gris clar és el doble que l'àrea de la zona gris fosc. Aleshores en Pere diu: *Molt bé! Els assignarem respectivament 9 i 18 punts.* Si ho fan d'aquesta manera, quant sumaran les puntuacions que hauran d'assignar a les dues zones de color blanc?



12. Quin és el mínim nombre d'angles obtusos que, necessàriament, ha de tenir un heptàgon convex?

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Participació i centres destacats

La darrera convocatòria dels **Problemes a l'esprint** del curs 2008-2009 era la XVI adreçada a equips d'alumnes de segon cicle d'ESO i batxillerat. Es va desenvolupar el 29 d'abril de 2009 i hi van participar un total de 57 equips de 53 centres, un de l'illa de Mallorca, 7 de la Comunitat Valenciana i tots els altres, de Catalunya. La comissió organitzadora va incorporar les variants de desenvolupament de l'activitat (algun problema menys i altres fora de concurs, voluntaris) i ha rebut missatges encoratjadors que ens diuen que l'activitat ha esdevingut ben interessant.

Gràcies a tothom i fins a la propera!

Centres més destacats

- CEPSA Oriol Martorell (Barcelona), 41 minuts,
  centre guanyador de l'activitat
  format només per alumnes d'ESO
- IES Montserrat (Barcelona), 47 minuts
- Aula Escola Europea (Barcelona), 51 minuts,
  equip format només per alumnes d'ESO

Altres centres que han encertat totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi, (*) indica equip només d'ESO)

IES d'Albalat de la Ribera (Albalat de la Ribera) (*)
IES Bellaguarda (Altea) (*)
IES Baltasar Porcel (Andratx) (*)
IES Jaume Balmes (Barcelona)
IES Maragall (Barcelona)
Joan Pelegrí (Barcelona)
Pare Manyanet (Barcelona) (*)
IES de la Bisbal (La Bisbal d'Empordà)
IES Arquitecte Manuel Raspall (Cardedeu)
IES Jaume Vicens Vives (Girona)
IES Santa Eugènia (Girona)
IES Samuel Gili i Gaya (Lleida)
IES Gregori Maians (Oliva)
IES Montsacopa (Olot)
Col·legi Regina Carmeli (Rubí) (*)
Col·legi El Cim (Terrassa) (*)
Col·legi Sagrat Cor (Terrassa) (*)
Col·legi Tecnos (Terrassa)
Col·legi Sagrada Família (Tortosa) (*)
IES de la Vall d'Alba (Vall d'Alba)
Cor de Maria (Valls) (*)

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Les solucions

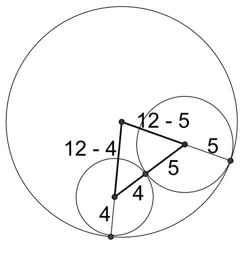
1. 19.

Per trobar el nombre més gran que compleix la condició que ens demanen és clar que el quocient haurà de ser tan gran com sigui possible. Però com que en aquest cas es relacionen el quocient i el residu i el residu com a màxim pot ser 2008, trobarem N com el nombre que dividit per 2009 dóna 2008 de residu i 2007 de quocient.
Aquest nombre és $N = 2009 \cdot 2007 + 2008 = 4034071$. La suma de les xifres de N és, doncs, 19.

Passa $E = 19$ al problema 5

2. 24.

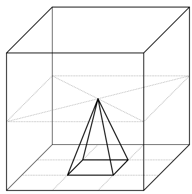
La figura mostra que, aplicant adequadament la idea de tangència, els tres costats del triangle són: la suma dels dos radis petits, el radi gran menys el radi mitjà i el radi gran menys el radi petit.



Del problema 5 passa $A = 6$

3. E. 4 cm ^{2}.

El volum d'una piràmide és $\frac{1}{3} \cdot S \cdot a$ on S és l'àrea de la base i a és l'altura de la piràmide. Si s'observa acuradament la figura, com que l'aresta del cub és 6, resulta que el costat del quadrat que és base de la piràmide és $\frac{6}{3} = 2$ i per tant serà $S = 4$ i que l'altura és $\frac{6}{2} = 3$.



4. 360.

Com que el 25% equival a $\frac{1}{4}$ i el 75% a $\frac{3}{4}$, a partir de l'enunciat resulta que la fracció de rates de cua llarga és $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{40}$.

Així doncs $99 = \frac{11}{40}$ del total de rates.

Per tant el nombre demanat és $\frac{99 \cdot 40}{11} = 360$.

Del problema 1 passa $E = 19$

5. 7462.

Si x representa el nombre d'euros que portaven, l'enunciat es tradueix així a una equació: $\frac{26}{19} \cdot x - 2009 = x$. Si es resol aquesta equació resulta $x = 5453$ però com que es demana el nombre de dòlars, aquest serà $\frac{26}{19} \cdot 5453 = 7462$.

Passa $A = 6$ al problema 3.

6. 6.

Posarem $A_1, A_2, ..., A_{11}, A_{12}$ les persones assistents i indicarem amb $\leftrightarrow$ la relació de coneixença.

Si A_1 només coneix una persona i A_{11} les coneix totes es dedueix que $A_1 \leftrightarrow A_{11}$.

Raonant de manera semblant, com que A_2 coneix dues persones, una d'elles serà A_{11} i l'altra ha de ser A_{10} que coneix totes les persones menys una; la que no coneix és A_1. Per tant $A_2 \leftrightarrow A_{11}$ i $A_2 \leftrightarrow A_{10}$.

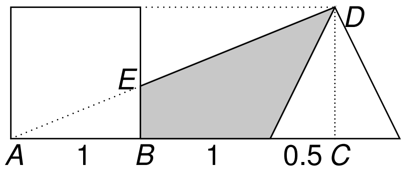
Així podem anar seguint i veurem que $A_3 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9$, que $A_4 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9, A_8$ i que $A_5 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7$

Quan arribem a A_6 raonarem que coneix $A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7$ però a més ha de conèixer una altra persona que no pot ser cap de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Per tant $A_6 \leftrightarrow A_{12}$.

Semblantment, ja tenim escrites 6 persones conegudes de A_7 i en sabem 4 que no el coneixen. Deduïm doncs que $A_7 \leftrightarrow A_{12}$ i anàlogament es raona que $A_8 \leftrightarrow A_{12}$, $A_9 \leftrightarrow A_{12}$, $A_{10} \leftrightarrow A_{12}$ i, com que ja sabíem per l'enunciat que A_{11} coneix totes les altres persones convidades, $A_{11} \leftrightarrow A_{12}$

7. Equips d'ESO. E. $\frac{4}{5}$.

Els triangles ACD i ABE de la figura són semblants. Per tant $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BE}{AB}$ i com que $CD = AB = 1$ i $AC = \frac{5}{2}$ es dedueix que $BE = \frac{2}{5}$. Podem calcular l'àrea demanada com l'àrea del trapezi $BCDE$, que és $\dfrac{1+\frac{2}{5}}{2} \cdot \dfrac{3}{2}$, menys la meitat de l'àrea del triangle isòsceles inicial, és a dir $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 \cdot 1}{2}$. El resultat és el que s'ha indicat.



7. Equips d'ESO i BTX. E. $2bc$.

Pensant que aquesta és una qüestió "amb opcions", és clar que si l'enunciat s'ha de complir en general també s'haurà de complir per valors concrets que donem a a, b, c.

Si posem $a = 5, b = 4, c = 3$, que compleixen $a^2 = b^2 + c^2$, i busquem el valor de

$$\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)}$$

resulta 24, que només pot correspondre a la resposta E).

Tanmateix el que acabem de fer consisteix només a "*trobar la solució per als problemes a l'esprint*" però potser no és "*resoldre el problema*". És interessant veure una demostració general del que es demanava.

Si en l'expressió del radicand, és a dir$(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)$ agrupem el primer factor amb el quart podem aplicar la propietat de suma per diferència i tenim $(b+c+a)\cdot(b+c-a) = (b+c)^2 - a^2$ i si desenvolupem i apliquem la condició $a^2 = b^2 + c^2$ resulta $2bc$. Semblantment agrupem el segon i el tercer factor i tenim $(a+b-c)\cdot(a+c-b) = (a+b-c)\cdot(a-(b-c)) = a^2 - (b-c)^2 = ... = 2bc$. Per tant el que tenim és $\sqrt{2bc \cdot 2bc}$ i arribem al resultat indicat.

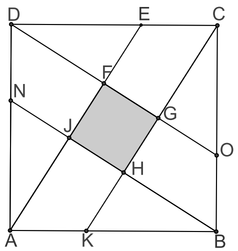
8. Equips d'ESO. 27.

Atenent al fet que es pot treballar a l'aula d'informàtica aquest és un bonic exemple per fer amb el full de càlcul. Si escrivim 59 a la cel·la A1, a A2, 99, a A3, 209, i a A4 la fòrmula A1+A2-A3 i copiem aquesta fórmula per arrossegament a la columna A, veurem que a la cel·la A27 hi apareix 2009. Tanmateix, també podem fer-ho "a mà". Si posem a, b, c els tres primers termes de la successió, els següents són $a+b-c, 2c-a, 2a+b-2c, 3c-2a, \ldots$. Deduïm que en el lloc $2+2k$ apareix el terme $k \cdot a+b-k \cdot c$ que es fa negatiu de seguida i per tant no serà en cap cas 2009 i en el lloc $3+2k$ hi tenim $(k+1) \cdot c - k \cdot a$. Si posem $a = 59$ i $c = 209$ aquesta expressió ens dóna 2009 per $k = 12$, que correspon al 27è terme de la successió.

La solució, N = 27 passa al problema 9 per als equips només d'alumnes d'ESO.

8. Equips d'ESO i BTX. 117.

Des dels altres dos vèrtexs del quadrat fem la mateixa construcció que indica l'enunciat, mitjançant perpendiculars als segments que divideixen el quadrat en tres parts d'igual àrea. D'aquesta manera el quadrat queda dividit en quatre triangles rectangles iguals, AFD, DGC, CHB i BJA i un quadrat central.



L'àrea del paral·lelogram $AKCE$ i la del triangle AED han de ser iguals i si prenem com a base el segment comú AE, aleshores si l'altura FG del paral·lelogram és 3, la del triangle, és a dir DF, serà 6. Així veiem que els quatre triangles triangles rectangles que hem indicat tenen catets 9 i 6 i, naturalment, el quadrat $FGHJ$ té costat 3. Per tant l'àrea del quadrat serà: $4 \cdot (\frac{6 \cdot 9}{2}) + 3^2 = 108 + 9 = 117$.

La solució, N = 117 passa al problema 9 per als equips conjunts d'ESO i Batxillerat.

Solucions als reptes finals

9. Equips d'ESO. 74.

Passa $N = 27$ del problema 8. Serà $N - 3 = 24$. Com que el quocient de dividir 1000 per 27 és 37, hi ha 37 múltiples de 27 en el conjunt de nombres naturals de l'1 al 1000. De la mateixa manera veiem que hi ha 41 múltiples de 24. Com que el mínim comú múltiple de 27 i 24 és 216 els múltiples d'aquest nombre seran els múltiples comuns de 24 i 27; n'hi haurà 4. Per tant la solució del problema és $37 + 41 - 4 = 74$.

9. Equips d'ESO i BTX. 3412657.

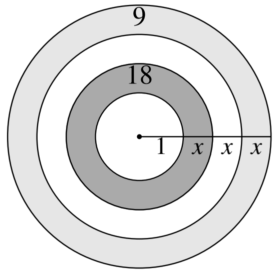
Passa N=117 del problema 8 i per tant serà $n = 13$, el divisor primer més gran de N. Hem de buscar el nombre de set xifres que estarà en el lloc 169è entre els que es poden formar com diu l'enunciat.

Primer de tot considerem ordenacions amb l'esquema 12*****, on ***** ha de ser una permutació de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ en què el 6 i el 7 no estiguin junts. En total hi ha 120 permutacions de cinc nombres, de les quals haurem de restar les que tenen junts el 6 i el 7. Si imaginem que permutem els quatre objectes $\{67, 3, 4, 5\}$ veurem que hi ha 24 permutacions que tenen el 6 i el 7 junts en aquest ordre; n'hi haurà 24 més amb el 7 i el 6 junts en l'ordre 76. Per tant són $120 - 2 \cdot 24 = 72$ les permutacions 12***** que compleixen les condicions de l'enunciat. Seguiran les 21*****,que naturalment també són 72 i després les del tipus 3 12 ****. Raonant de manera anàloga al que ja hem fet veurem que hi ha 12 permutacions de $\{4, 5, 6, 7\}$ en què el 6 i el 7 queden separats. A continuació hi haurà 12 permutacions més que interessen i que segueixen l'esquema 3 21 ****. Fins aquí ja tenim 168 permutacions. Quina és la següent que compleix l'enunciat? 3 4 12 657.

10. 60.

Si indiquem a, b les dimensions del rectangle interior, el nombre de peces blanques serà $a{\cdot}b$ i el de peces grises $2a+2b+4$. Si de l'equació $a{\cdot}b = 2a+2b+4$ aillem b obtenim $b = \dfrac{2a+4}{a-2} = 2 + \dfrac{8}{a-2}$ i, si tenim en compte que a i b han de ser nombres naturals trobarem les possibilitats $a = 3, 4, 6, 10$ que ens donen, respectivament $b = 10, 6, 4, 3$. Dels rectangles corresponents el més gran (tant pel que fa a l'àrea com el perímetre) és el que té dimensions 3×10 que implica que s'hauran fet servir 30 peces blanques i 30 de grises.

11. 44.



Les superfícies de les quatre zones de la diana, dividides per π, són $1, (1+x)^2 - 1, (1+2x)^2 - (1+x)^2, (1+3x)^2 - (1+2x)^2$. Si igualem la segona i la quarta trobarem $x = \dfrac{2}{3}$. En aquest cas les quatre superfícies estan en proporció a $1, \dfrac{16}{9}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{32}{9}$.

Si a una superfície $\dfrac{32}{9} \cdot \pi$ se li assignen 9 punts, si fem les corresponents proporcionalitats inverses veurem que a una superfície de π unitats li corresponen 32 punts i a una superfície de $\dfrac{8}{3} \cdot \pi$ li corresponen 12 punts.

És interessant comentar que bastaria que l'enunciat donés una sola de les dades de 9 punts i 18 punts. Naturalment aquestes dades es donen de manera consistent amb l'assignació inversament proporcional.

12. 4.

Els set angles d'un heptàgon sumen 900°. Veurem tot seguit que el nombre màxim d'angles aguts o rectes que hi pot haver és 3.
Efectivament, si n'hi hagués 4 la suma d'aquests quatre angles seria com a màxim de 360° i, per tant, entre els altres tres haurien de sumar 540° o més cosa que implica que algun d'aquests angles (que no es poden considerar de 180° en un polígon) hauria de superar 180° i per tant l'heptàgon ja seria còncau.
Sí que és possible, en canvi, construir un heptàgon amb tres angles aguts o rectes. Per exemple amb tres angles rectes i quatre angles de $157,5°$.